بسم الله الرحمن الرحيم
وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا
وَيَرْزُقْهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ

الأوائل

رياضيات

الصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسي الثاني

٣ ع ت ٢

....
..

أ/ محمد غلاب ٠١٠١٩٩٩١١٣٠

المحتويـــات

أ/ محمد غلاب   ٠١٠١٩٩٩١١٣٠

حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانياً

أولاً حل معادلة من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانياً

أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية بيانياً

ص = س + ٢

بفرض س = ٠

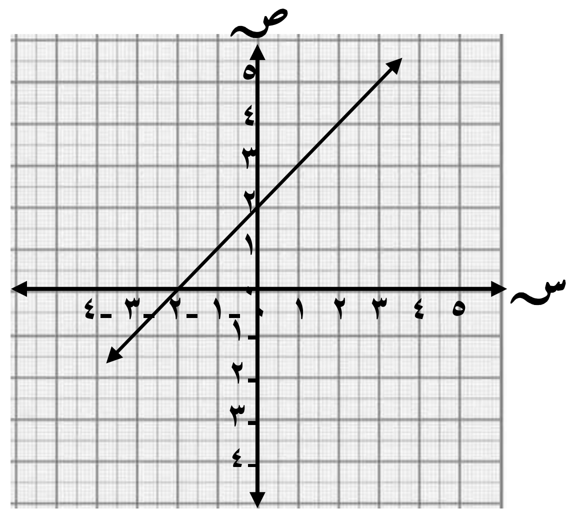
ص = (٠) + ٢ = ٢ (٠ ، ٢)

بفرض س = ١

ص = (١) + ٢ = ٣ (١ ، ٣)

بفرض س = ٢

ص = (٢) + ٢ = ٤ (٢ ، ٤)



عدد الحلول لا نهائى

م.ح = { (س ، ص) ∋ ح × ح : ص= س+٢ }

ثانياً حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانياً

(١) أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

ص = ٥س - ٣ ، س + ٣ص = ٧

المعادلة الأولى ص = ٥ س - ٣

بفرض س = ٠

ص = ٥×(٠) - ٣ = -٣ (٠ ، -٣)

بفرض س = ١

ص = ٥×(١) - ٣ = ٢ (١ ، ٢)

بفرض س = ٢

ص = ٥×(٢) - ٣ = ٧ (٢ ، ٧)

المعادلة الثانية س + ٣ ص = ٧

س = ٧ - ٣ ص

بفرض ص = ٠

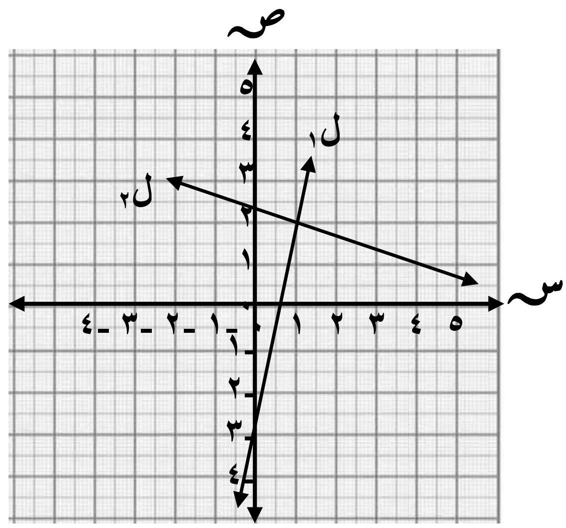
س = ٧ - ٣ ×(٠) = ٧ (٧ ، ٠)

بفرض ص = ١

س = ٧ - ٣ ×(١) = ٤ (٤ ، ١)

بفرض ص = ٢

س = ٧ - ٣ ×(٢) = ١ (١ ، ٢)



م.ح = { (١ ، ٢) } المستقيمان متقاطعان

عدد الحلول حل وحيد

☎ (٢) أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

٣ س + ص = ٣ ، ٢ ص + ٦ س = ١٢

المعادلة الأولى ٣ س + ص = ٣

ص = – ٣ س + ٣

بفرض س = ٠

ص = – ٣×(٠)+٣=٣ (٠ ، ٣)

بفرض س = ١

ص = – ٣×(١)+٣=٠ (١ ، ٠)

بفرض س = ٢

ص =– ٣×(٢)+٣=– ٣ (٢ ، –٣)

المعادلة الثانية ٢ ص + ٦ س = ١٢

٢ ص = – ٦ س + ١٢ (÷ ٢)

ص = – ٣ س + ٦

بفرض س = ٠

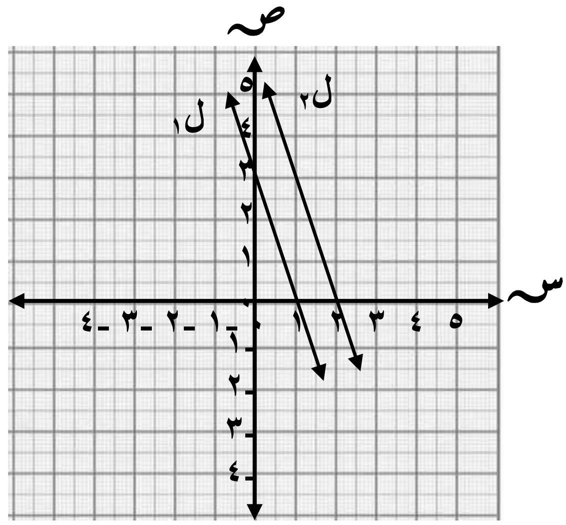
ص = – ٣×(٠)+٦=٦ (٠ ، ٦)

بفرض س = ١

ص = – ٣×(١)+٦=٣ (١ ، ٣)

بفرض س = ٢

ص = – ٣×(٢)+٦=٠ (٢ ، ٠)



المستقيمان متوازيان م.ح = ∅

عدد الحلول = صفر

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

٢ س + ص = ٤ ، ٨ – ٢ص = ٤س

المعادلة الأولى ٢ س + ص = ٤

ص = – ٢س+٤

بفرض س = ٠

ص = – ٢×(٠)+٤=٤ (٠ ، ٤)

بفرض س = ١

ص = – ٢×(١)+٤=٢ (١ ، ٢)

بفرض س = ٢

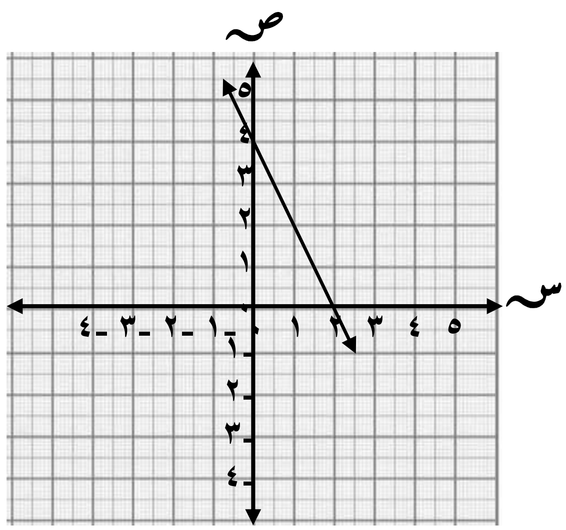
ص =– ٢×(٢)+٤=٠ (٢ ، ٠)

المعادلة الثانية ٨ – ٢ص = ٤س

– ٢ص = ٤س – ٨ (÷– ٢)

ص = – ٢ س + ٤

نلاحظ أن المعادلة الثانية نفس المعادلة الأولى



المستقيمان منطبقان عدد الحلول = لا نهائى

م.ح ={(س ، ص)∈ ح × ح : ص = – ٢س+٤}

تدريبات

(٤) أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

٢ ص + س = ٤ ، س = ص - ٢

المعادلة الأولى ٢ ص + س = ٤

٢ ص = ٤ - س (÷ ٢)

ص = $\frac{\text{٤ - س}}{\text{٢}}$

بفرض س = ٠

ص = $\frac{\text{٤ - س}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{٤ - (٠)}}{\text{٢}}$ = ٢ (٠ ، ٢)

بفرض س = ٢

ص = $\frac{\text{٤ - س}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{٤ - (٢)}}{\text{٢}}$ = ١ (٢ ، ١)

بفرض س = ٤

ص = $\frac{\text{٤ - س}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{٤ - (٤)}}{\text{٢}}$ = ٠ (٤ ، ٠)

المعادلة الثانية س = ص - ٢

بفرض ص = ٠

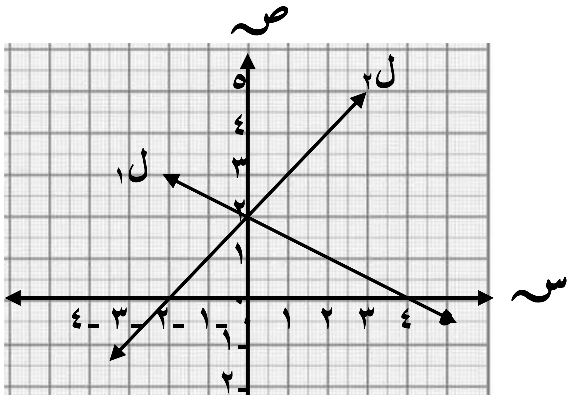
س = (٠) - ٢ = - ٢ (-٢ ، ٠)

بفرض ص = ١

س = (١) - ٢ = - ١ (-١ ، ١)

بفرض ص = ٢

س = (٢) - ٢ = ٠ (٠ ، ٢)



م.ح = {(٠ ، ٢)} المستقيمان متقاطعان عدد الحلول حل وحيد

س١ أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

(١) س = ص - ١ ، ص = - س + ٣

(٢) س + ص = ٢ ، س - ص = ٤

(٣) ص = ٢ س - ٣ ، س +٢ ص = ٤

(٤) ٢س + ص = ٠ ، س +٢ ص = ٣

(٥) ص = ٣ س - ١ ، س - ص + ١ = ٠

(٦) س + ص = ٠ ، ص - ٥ = ٠

(٧) س + ٤ = ٠ ، ص - ٣ = ٠

(٨) س + ٣ص = ٤ ، ص - ٣س = - ٢

س٢ أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

(١) س + ص = ٢ ، س + ص = ٤

(٢) س + ٢ص = ٣ ، ٢ص = ٥ - س

(٣) ٢س + ص = ٥ ، ص = ٦ - ٢س

(٤) س + ٣ص = ٤ ، س = ٢ - ٣ص

(٥) س + ٤ص = ٨ ، ٤ص = ٥ - س

(٦) س - ص = ٣ ، س = ١ + ص

س٣ أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

(١) س + ص = ٢ ، ٢س = ٤ - ٢ص

(٢) ص = ٢ س - ٣ ، ٣ص - ٦ س = - ٩

(٣) ص = ٣ س - ٢ ، ٥ص - ١٥س + ١٠ = ٠

(٤) س + ٢ص = ٣ ، ٨ص = ١٢ - ٤س

(٥) ص = س - ٣ ، ٢ص - ٢س + ٦ = ٠

(٦) ٣س + ٢ص = ٦ ، ص = ٣ - $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ س

حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبرياً (بطريقة الحذف)

(١) أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً

٢ س + ص = ٥ ، س - ص = ١

٢ س + ص = ٥ $م_١$

س - ص = ١ $م_٢$

٣ س = ٦ (÷ ٣)

س = ٢

بالتعويض فى $م_١$ عن قيمة س

٢ س + ص = ٥ $م_١$

٢×(٢) + ص = ٥

٤ + ص = ٥

ص = ٥ - ٤

ص = ١

م.ح = { (٢ ، ١) }

المستقيمان متقاطعان ، عدد الحلول حل وحيد

---

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً

٢ س - ص = ٣ ، س + ٢ ص = ٤

بضرب المعادلة الأولى × ٢

٤ س - ٢ ص = ٦ $م_١$

س + ٢ ص = ٤ $م_٢$

٥ س = ١٠ (÷ ٥)

س = ٢

بالتعويض فى $م_٢$ عن قيمة س

س + ٢ ص = ٤ $م_٢$

(٢) + ٢ص = ٤

٢ص = ٤ - ٢

٢ص = ٢ (÷ ٢)

ص = ١

م.ح = { (٢ ، ١) }

المستقيمان متقاطعان ، عدد الحلول حل وحيد

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً

٢ س + ٣ص = ١٧ ، ٥س - ٨ = ٤ص

ترتيب حدود المعادلة الثانية

٥ س - ٤ ص = ٨ $م_٢$

ثم ضرب $م_١$ × ٤ و ضرب $م_٢$ × ٣

٨ س + ١٢ ص = ٦٨ $م_١$

١٥ س - ١٢ ص = ٢٤ $م_٢$

٢٣ س = ٩٢ (÷ ٢٣)

س = ٤

بالتعويض فى $م_١$ عن قيمة س

٨ س + ١٢ ص = ٦٨ $م_١$

٨ ×(٤) + ١٢ ص = ٦٨

٣٢+ ١٢ ص = ٦٨

١٢ص = ٦٨ - ٣٢

١٢ص = ٣٦ (÷ ١٢)

ص = ٣

م.ح = { (٤ ، ٣) }

المستقيمان متقاطعان ، عدد الحلول حل وحيد

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً
٢ س + ص = ٥ ، ٤س - ٢ص = ١

بضرب المعادلة الأولى × ٢

٤ س + ٢ ص = ١٠ م١
٤س - ٢ص = ١ م٢
٠ ≠ ١١
المستقيمان متوازيان
م.ح = ∅ عدد الحلول = صفر

---

(٤) أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً
٢ س + ص = ٥ ، ٤س +٢ص = ١٠

بضرب المعادلة الأولى × - ٢

- ٤ س - ٢ ص = - ١٠ م١
٤س - ٢ص = ١٠ م٢
٠ = ٠

المستقيمان منطبقان
م.ح ={ (س ، ص) ∋ ح × ح: ص= ٥ - ٢س}
عدد الحلول = لانهائى

---

(٥) أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً
س + ٢ = ٧ ، س +ص = ٨

المعادلة الأولى س + ٢ = ٧

س = ٧ - ٢
س = ٥ بالتعويض فى م٢ عن قيمة س
س +ص = ٨
٥ +ص = ٨
ص = ٨ - ٥
ص = ٣
م.ح = { (٥ ، ٣) }
المستقيمان متقاطعان ، عدد الحلول حل وحيد

---

(٦) إذا كان (٣ ، - ١) حلاً للمعادلتين
ٲ س + ب ص - ٥ = ٠ ، ٣ٲ س + ب ص = ١٧
أوجد قيمتى ٲ ، ب

بالتعويض بالنقطة (٣ ، - ١) فى م١
ٲ س + ب ص - ٥ = ٠
ٲ ×(٣) + ب ×(-١) = ٥

$\boxed{\text{٣ٲ - ب = ٥}}$

بالتعويض بالنقطة (٣ ، - ١) فى م٢
٣ ٲ ×(٣) + ب ×(-١) = ١٧

$\boxed{\text{٩ٲ - ب = ١٧}}$

٣ ٲ -ب = ٥ بالضرب × - ١

- ٣ ٲ + ب =-٥
٩ ٲ - ب = ١٧

٦ ٲ = ١٢
ٲ = ٢

بالتعويض فى المعادلة
- ٣ ٲ + ب = - ٥
- ٣ ×(٢) + ب = - ٥
-٦+ ب = - ٥
ب = - ٥ + ٦
ب = ١ ∴ ٲ = ٢ ، ب = ١

أكمل ما يأتى :

(١) عدد حلول المعادلتين
س + ص = ٢ ، ٢س = ٤ − ٢ص = ...
أولاً يجب وضع المعادلتين فى نفس الترتيب

س + ص = ٢ ، ٢س + ٢ص = ٤

ثانياً تبسيط المعادلة التى تقبل التبسيط
٢س + ٢ص = ٤ (÷ ٢)
س + ص = ٢

نلاحظ تماثل السينات و الصادات و الحد المطلق فى المعادلتين
نلاحظ أن المعادلة الثانية هى نفسها المعادلة الأولى
المستقيمان منطبقان و عدد الحلول لا نهائى

---

(٢) عدد حلول المعادلتين
٣س + ص = ٥ ، ١٢س = ١ − ٤ص = ...

أولاً يجب وضع المعادلتين فى نفس الترتيب
٣س + ص = ٥ ، ١٢س + ٤ص = ١

ثانياً تبسيط المعادلة التى تقبل التبسيط
١٢س + ٤ص = ١ (÷ ٤)
٣س + ص = $\frac{١}{٤}$

نلاحظ تشابه السينات والصادات فقط فى المعادلتين
نلاحظ أن المعادلة الثانية تختلف عن المعادلة الأولى فى الحد المطلق فقط
المستقيمان متوازيان و عدد الحلول صفر

---

(٣) عدد حلول المعادلتين
ص = ٢ س − ٣ ، س +٢ ص = ٤ = ...

أولاً يجب وضع المعادلتين فى نفس الترتيب
ص − ٢س = − ٣ ، ٢ص + س = ٤

ثانياً لا يوجد تبسيط لأى من المعادلتين
و لا يوجد تشابه بين حدود المعادلتين
المستقيمان متقاطعان ، عدد الحلول حل وحيد

(٤) إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين
س + ٣ص = ٤ ، س + م ص = ٧ متوازيين
فإن م = ...
لكى يكون المستقيمان متوازيين يجب أن يكون هناك تماثل فى السينات و الصادات فى المعادلتين
م = ٣

---

(٥) إذا كان للمعادلتين
س + ٢ص = ١ ، ٢س + ك ص = ٢ حل وحيد
فإن ك لا يمكن أن تساوى ....

للمعادلتين حل وحيد أى أن المستقيمان متقاطعان

معامل س فى المعادلة الأولى = ١
معامل س فى المعادلة الثانية = ٢
أى أنه تم الضرب فى ٢

معامل ص فى المعادلة الأولى = ٢
بالضرب فى ٢ ٢ × ٢ = ٤

إذا كان ك = ٤ هذا يجعل المستقيمان متوازيان أو متطابقان
لذلك فإن ك لا يمكن أن تساوى ٤

---

(٦) إذا كان للمعادلتين
س + ٤ص = ٧ ، ٣س + ك ص = ٢١ عدد لا نهائى من الحلول فإن ك = ...

للمعادلتين عدد لا نهائى من الحلول أى أن المستقيمان منطبقان

معامل س فى المعادلة الأولى = ١
معامل س فى المعادلة الثانية = ٣
أى أنه تم الضرب فى ٣

معامل ص فى المعادلة الأولى = ٤
بالضرب فى ٣ ٤ × ٣ = ١٢
ك = ١٢

(٧) زاويتان حادتان فى مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠° أوجد قياس كل منهما

نفرض قياس الزاويتين س ، ص

س + ص = ٩٠°

س - ص = ٥٠°

٢ س = ١٤٠° (÷ ٢)

س = ٧٠°

بالتعويض فى م١ عن قيمة س

٧٠° + ص = ٩٠°

ص = ٩٠° - ٧٠°

ص = ٢٠°

---

(٨) زاويتان متكاملتان ضعف قياس الكبرى يساوى سبعة أمثال قياس الصغرى أوجد قياس كل منهما

نفرض قياس الزاويتين س ، ص

س + ص = ١٨٠° ، ٢س = ٧ ص

٢س - ٧ ص = ٠

بضرب المعادلة الأولى × ٧

٧س + ٧ص = ١٢٦٠°

٢س - ٧ ص = ٠

٩ س = ١٢٦٠° (÷ ٩)

س = ١٤٠°

بالتعويض فى م١ عن قيمة س

س + ص = ١٨٠°

١٤٠° + ص = ١٨٠°

ص = ١٨٠° - ١٤٠°

ص = ٤٠°

(٨) مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم
فإذا كان محيط المستطيل يساوى ٢٨ سم
أوجد مساحة المستطيل

نفرض الطول = س ، العرض = ص

س – ص = ٤ م١

محيط المستطيل =(الطول + العرض) ×٢=٢٨

(س + ص) × ٢ = ٢٨ (÷ ٢)

س + ص = ١٤ م٢

س – ص = ٤ م١

٢ س = ١٨ (÷ ٢)

س = ٩

بالتعويض فى م١ عن قيمة س

∵ س - ص = ٤ م١

∴ ٩ - ص = ٤

- ص = ٤ – ٩

- ص = - ٥

ص = ٥

∴ الطول = ٩ سم ، العرض = ٥ سم

مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ٩ × ٥ = ٤٥ سم^{٢}

تدريبات

س١ أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً

(١) س + ص = ٥ ، س - ص = ١

(٢) س + ص = ٨ ، س - ص = ٢

(٣) س - ص = ٤ ، س + ص = ١٤

(٤) ٢س + ص = ١١ ، س - ص = ١

(٥) ٣س + ٤ص = ١٨ ، س - ٤ص = - ١٠

(٦) ٥س + ص = ١٣ ، ص - ٣ = ٠

(٧) س + ٥ = ٠ ، ص - ٤ = ٠

س٢ أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً

(١) ٢ س + ص = ٣ ، ٣س - ٢ ص = ٨

(٢) س + ٤ص = ١١ ، ٣س - ٥ ص = -١

(٣) ٣س - ٨ص = -٩ ، ٥س = ١٩+٢ ص

(٤) س + ص = ٢ ، ٣س = ١٢ - ٣ ص

(٥) س + ٢ص = ٣ ، ٨ص = ٢٠ - ٤س

(٦) س + ٤ص = ٣ ، ٨ص + ١٠ + ٢س = ٠

(٧) س + ص = ٢ ، ٢س = ٤ - ٢ص

(٨) ص = ٢ س - ٣ ، ٣ص - ٦ س = -٩

(٩) ص = ٣ س - ٢ ، ٥ص - ١٥س + ١٠ = ٠

(١٠) ٢س + ص = ٠ ، س +٢ ص = ٣

س٣ أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً

(١) ٣س + ٢ص = ٢٣ ، ٤س - ٣ ص = ٨

(٢) ٥س = ١٣ - ٣ص ، -٢ص + ٧س - ١٢ =٠

(٣) ٧س = ٥ص + ١١ ، ٢ص = ١٣ - ٣س

(٤) ٤س - ٣ص = ٥ ، ٣س = ٢ص + ٥

(٥) ٢س + ٣ص = ٧ ، ٩ص = ٢١ - ٦س

س٤

(١) إذا كان (٢ ، ١) حلاً للمعادلتين
ﻡ س + ب ص = ١٣ ، ﻡ س - ب ص = ٣
أوجد قيمتى ﻡ ، ب

(٢) إذا كان (١ ، ٢) حلاً للمعادلتين
ﻡ س + ب ص = ١٠ ، ﻡ س - ب ص = ٢
أوجد قيمتى ﻡ ، ب

(٣) إذا كان (٣ ، ٢) حلاً للمعادلتين
ﻡ س + ب ص = ٢٨ ، ﻡ س - ب ص = ٨
أوجد قيمتى ﻡ ، ب

(٤) إذا كان (٥ ، ٤) حلاً للمعادلتين
ﻡ س + ب ص = ٢٢ ، ب س - ﻡ ص = ٧
أوجد قيمتى ﻡ ، ب

س٥

(١) عددان مجموعهما ٩ و الفرق بينهما ٥
أوجد العددين

(٢) عددان مجموعهما ١٤ و الفرق بينهما ٤
أوجد العددين

(٣) زاويتان حادتان فى مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٢٠° أوجد قياس كل منهما

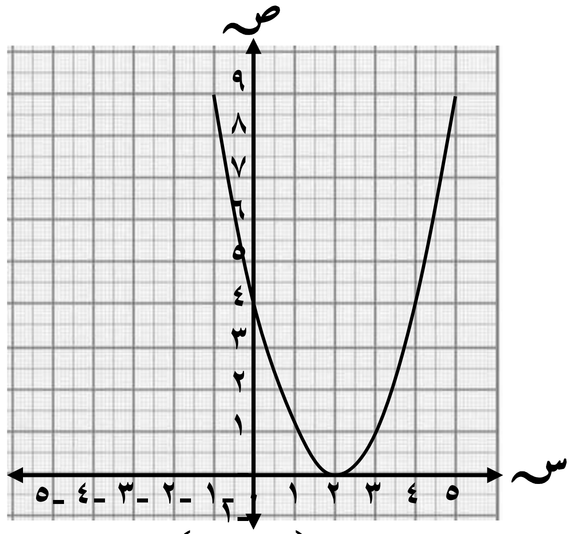
(٤) مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٥ سم
فإذا كان محيط المستطيل يساوى ١٨ سم
أوجد مساحة المستطيل

حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانياً

مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية ومن الرسم استنتج إحداثى رأس المنحنى و معادلة محور التماثل و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة و مجموعة حل المعادلة د(س) = صفر

(١) د(س) = (س-٢)^{٢} حيث س ∋ [-١ ، ٥]

د(-١) = (-١-٢)^{٢} = ٩	(-١، ٩)
د(٠) = (٠-٢)^{٢} = ٤	(٠، ٤)
د(١) = (١-٢)^{٢} = ١	(١، ١)
د(٢) = (٢-٢)^{٢} = ٠	(٢، ٠)
د(٣) = (٣-٢)^{٢} = ١	(٣، ١)
د(٤) = (٤-٢)^{٢} = ٤	(٤، ٤)
د(٥) = (٥-٢)^{٢} = ٩	(٥، ٩)



رأس المنحنى (٢ ، ٠)

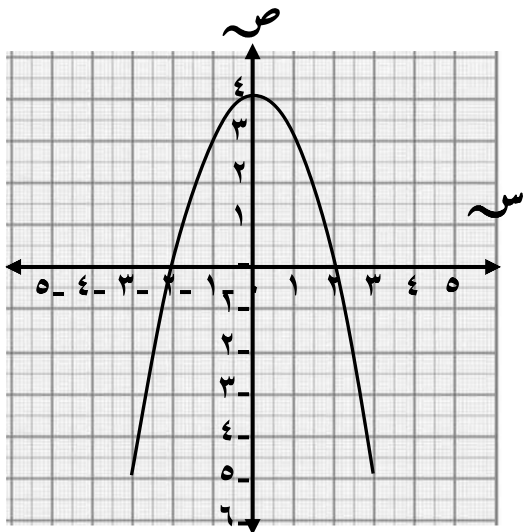
معادلة محور التماثل س = ٢

القيمة الصغرى عند ص = ٠

م.ح = { ٢ }

(٢) د(س) = ٤ - س^{٢} حيث س ∋ [-٣ ، ٣]

د(-٣) = ٤ - (-٣)^{٢} = -٥	(-٣ ، -٥)
د(-٢) = ٤ - (-٢)^{٢} = ٠	(-٢ ، ٠)
د(-١) = ٤ - (-١)^{٢} = ٣	(-١ ، ٣)
د(٠) = ٤ - (٠)^{٢} = ٤	(٠ ، ٤)
د(١) = ٤ - (١)^{٢} =٣	(١ ، ٣)
د(٢) = ٤ - (٢)^{٢} = ٠	(٢ ، ٠)
د(٣) = ٤ - (٣)^{٢} = -٥	(٣ ، -٥)



رأس المنحنى (٠ ، ٤)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة العظمى عند ص = ٤

م.ح = { ٢ ، -٢ }

<u>لاحظ أن</u>

مجموعة حل المعادلة هى نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات

و إذا لم يقطع المنحنى محور السينات يكون م.ح = ∅

تدريبات

مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية ومن الرسم استنتج إحداثى رأس المنحنى و معادلة محور التماثل و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة و مجموعة حل المعادلة د(س) = صفر

(١) د(س) = س^{٢} − ٤ س + ٣
حيث س ∈ [−١ ، ٥]

(٢) د(س) = س^{٢} + ٢ س + ١
حيث س ∈ [−٤ ، ٢]

(٣) د(س) = − س^{٢} + ٦ س − ١١
حيث س ∈ [٠ ، ٦]

(٤) د(س) = س^{٢} − ٢ س − ٤
حيث س ∈ [−٢ ، ٤]

(٥) د(س) = ٢س^{٢} + ٥ س
حيث س ∈ [−٤ ، ٢]

(٦) د(س) = ٣س − س^{٢} + ٢
حيث س ∈ [−١ ، ٤]

(٧) د(س) = س (س − ٥) + ٣
حيث س ∈ [٠ ، ٥]

(٨) د(س) = ٢س^{٢} − ٣ (٢ − س)
حيث س ∈ [−٣ ، ٢]

حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد جبرياً باستخدام القانون العام

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

القانون العام $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ}}{٢\,أ}$

◄ إذا كان قيمة ب^{٢} − ٤ أ جـ < صفر (عدد سالب)
يكون عدد الحلول = صفر ، م.ح = ∅

◄ إذا كان قيمة ب^{٢} − ٤ أ جـ > صفر (عدد موجب)
يكون عدد الحلول = ٢

◄ إذا كان قيمة ب^{٢} − ٤ أ جـ = صفر
يكون عدد الحلول = ١

(١) أوجد مجموعة حل المعادلة باستخدام القانون العام

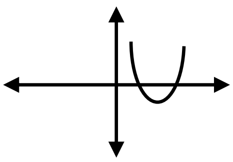
س^{٢} − ٤ س + ٢ = ٠

أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = ٢

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ}}{٢\,أ}$

$س = \frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤ \times (١) \times (٢)}}{٢ \times (١)}$

س = ٢ ± $\sqrt{٢}$ م.ح = { ٢ + $\sqrt{٢}$ ، ٢ − $\sqrt{٢}$ }



(٢) أوجد مجموعة حل المعادلة

باستخدام القانون العام

$\text{س}^{٢} = ٢\,\text{س} + ٢$ اعتبر $\sqrt{٣} = ١و٧$

أولاً يجب ترتيب حدود المعادلة على الصورة العامة

$\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٢ = ٠$

$\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -٢$ ، $\text{جـ} = -٢$

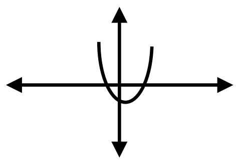
$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ \times (١) \times (-٢)}}{٢ \times (١)}$$

$$\text{س} = ١ \pm \sqrt{٣}$$

$١ + \sqrt{٣}$	$١ - \sqrt{٣}$
$١ + ١و٧$	$١ - ١و٧$
$٢و٧$	$-٠و٧$

م.ح = { ٢و٧ ، − ٠و٧ }



(٣) أوجد مجموعة حل المعادلة

باستخدام القانون العام

$\text{س}\,(\text{س} + ٥) + ٥ = ٠$

مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

$\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س} + ٥ = ٠$

$\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = ٥$ ، $\text{جـ} = ٥$

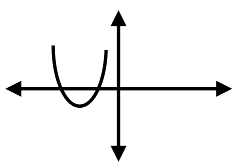
$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-(٥) \pm \sqrt{(٥)^{٢} - ٤ \times (١) \times (٥)}}{٢ \times (١)}$$

$$\text{س} = \frac{-٥ \pm \sqrt{٥}}{٢}$$

$\frac{-٥ + \sqrt{٥}}{٢}$	$\frac{-٥ - \sqrt{٥}}{٢}$
$-١و٣٨٢$	$-٣و٦١٨$

م.ح = { − ١و٣٨٢ ، − ٣و٦١٨ }



(٤) أوجد مجموعة حل المعادلة
باستخدام القانون العام $\quad \text{س} + \frac{٣}{\text{س}} = ١$

$\text{س} + \frac{٣}{\text{س}} = ١ \qquad$ بالضرب × س

$\text{س} \times \text{س} + \frac{٣}{\text{س}} \times \text{س} = ١ \times \text{س}$

$\text{س}^{٢} + ٣ = \text{س}$

$\text{س}^{٢} - \text{س} + ٣ = ٠$

ﻡ = ١ ، ب = −١ ، جـ = ٣

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{ﻡ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{ﻡ}}$$

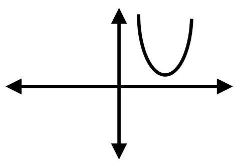
$$\text{س} = \frac{-(-١) \pm \sqrt{(-١)^{٢} - ٤ \times (١) \times (٣)}}{٢ \times (١)}$$

$$\text{س} = \frac{١ \pm \sqrt{-١١}}{٢}$$

غير معرفة

◄ لأن قيمة $\text{ب}^{٢}$ − ٤ ﻡ جـ < صفر (عدد سالب)

∴ م.ح = ∅



(٥) أوجد مجموعة حل المعادلة
باستخدام القانون العام

$\text{س}\,(\text{س} - ٦) + ٩ = ٠$

$\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٩ = ٠$

ﻡ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ٩

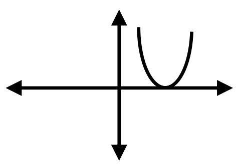
$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{ﻡ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{ﻡ}}$$

$$\text{س} = \frac{-(-٦) \pm \sqrt{(-٦)^{٢} - ٤ \times (١) \times (٩)}}{٢ \times (١)}$$

$$\text{س} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

م.ح = { ٣ }

◄ إذا كان قيمة $\text{ب}^{٢}$ − ٤ ﻡ جـ = صفر
يكون عدد الحلول = ١



(٦) أوجد مجموعة حل المعادلة

باستخدام القانون العام

مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

$$(\text{س} - ٣)^{٢} - (\text{س} - ٣) - ٤ = ٠$$

$$\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٩ - \text{س} + ٣ - ٤ = ٠$$

$$\text{س}^{٢} - ٧\,\text{س} + ٨ = ٠$$

$$\text{أ} = ١ \text{ ، } \text{ب} = -٧ \text{ ، } \text{جـ} = ٨$$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}}$$

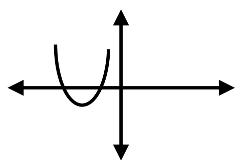
$$\text{س} = \frac{-(-٧) \pm \sqrt{(-٧)^{٢} - ٤ \times (١) \times (٨)}}{٢ \times (١)}$$

$$\text{س} = \frac{٧ \pm \sqrt{١٧}}{٢}$$

$$\frac{٧ + \sqrt{١٧}}{٢} \quad \Big| \quad \frac{٧ - \sqrt{١٧}}{٢}$$

٥٫٥٦٢ | ١٫٤٣٨

م.ح = { ٥٫٥٦٢ ، ١٫٤٣٨ }



تدريبات

س١ أوجد مجموعة حل المعادلة

باستخدام القانون العام

مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

(١) $\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٦ = ٠$

(٢) $\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ٣ = ٠$

(٣) $٢\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ١ = ٠$

(٤) $٣\,\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ١ = ٠$

(٥) $\text{س}\,(\text{س} - ١) = ٤$

(٦) $٣\text{س}^{٢} = ٥\,\text{س} - ١$

(٧) $(\text{س} - ٣)^{٢} - ٥\text{س} = ٠$

(٨) $\text{س} + \frac{٤}{\text{س}} = ٦$

(٩) $\frac{٨}{\text{س}^{٢}} + \frac{٤}{\text{س}} = ١$

(١٠) $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{٤}{\text{س} - ٥}$

مراجعة على التحليل

التحليل بأخراج العامل المشترك الأكبر

باخراج العامل المشترك للأعداد و الرموز

(١) أ س + أ ص = أ (س + ص)

(٢) ٢ س – ١٠ = ٢ (س – ٥)

(٣) ٣س – ١٢ = ٣ (س – ٤)

(٤) س^{٢} – ٣ س = س (س – ٣)

(٥) ٦س^{٣} + ٩ س^{٢} = ٣ س^{٢} (٢ س +٣)

تحليل المقدار الثلاثي البسيط

على الصورة أ س^{٢} + ب س + جـ حيث أ = ١

س٢ – ٥ س +٦ = (س – ٢) (س – ٣)

س٢ + ١٤ س +٢٤ = (س + ٢) (س + ١٢)

س٢ – ٦ س – ٤٠ = (س +٤)(س – ١٠)

س٢ + ٣ س – ٤٠ = (س – ٥) (س + ٨)

تحليل المقدار الثلاثى الغير بسيط

أ س^{٢} + ب س + جـ حيث أ > ١

×

٣س^{٢} – ١٠ س +٨

= س^{٢} – ١٠ س +٢٤

= (س – ٤) (س – ٦) ÷٣

= (س – $\frac{٤}{٣}$) (س – $\frac{٦}{٣}$)

= (٣س – ٤) (س – ٢)

تحليل الفرق بين مربعين

س^{٢} – ص^{٢} = (س – ص) (س + ص)

س^{٢} – ٩ = (س + ٣) (س – ٣)

س^{٢} – ٢٥ = (س + ٥) (س – ٥)

تحليل مجموع وفرق بين مكعبين

س^{٣} – ص^{٣} = (س – ص)(س^{٢} + س ص + ص^{٢})

س^{٣} + ص^{٣} = (س + ص)(س^{٢} - س ص + ص٢)

س^{٣} – ٨ = (س – ٢) (س^{٢} + ٢ س + ٤)

س^{٣} + ٨ = (س + ٢) (س^{٢} – ٢ س + ٤)

التحليل بالتقسيم

س^{٢} + أ س + ب س + أ ب

= (س^{٢} + أ س) + (ب س + أ ب)

= س (س + أ) + ب (س + أ)

= (س + أ)(س + ب)

س^{٢} – ٥ س – ٤ ص^{٢} + ١٠ ص

= (س^{٢} – ٤ ص^{٢}) – (٥ س – ١٠ ص)

= (س – ٢ ص)(س+٢ص) – ٥ (س – ٢ ص)

= (س – ٢ ص)(س +٢ ص – ٥)

حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى و الأخرى من الدرجة الثانية

أوجد فى ح^{٢} مجموعة حل كل من المعادلات الآتية

(١) س = ٣ ، س ص = ٦

بالتعويض من م$_{١}$ فى م$_{٢}$ عن قيمة س

(٣) × ص = ٦

ص = ٢ ، ∵ س = ٣ ∴ م.ح = {(٣ ، ٢)}

---

(٢) س = ٣ ، س^{٢} + ص^{٢} = ١٣

بالتعويض من م$_{١}$ فى م$_{٢}$ عن قيمة س

(٣)^{٢} + ص^{٢} = ١٣

٩ + ص^{٢} = ١٣

ص^{٢} = ١٣ − ٩

ص^{٢} = ٤ ∴ ص = ± $\sqrt{٤}$ = ± ٢

∴ م.ح = {(٣ ، ٢) ، (٣ ، −٢)}

---

(٣) س = ص ، س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠

بالتعويض من م$_{١}$ فى م$_{٢}$ عن قيمة س

∵ س = ص ∵ س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠

∴ (ص)^{٢} + ص^{٢} = ٥٠

∴ ٢ ص^{٢} = ٥٠ (÷ ٢)

∴ ص^{٢} = ٢٥

∴ ص = ± $\sqrt{٢٥}$ = ± ٥ ، ∵ س = ص

∴ م.ح = {(٥ ، ٥) ، (−٥ ، −٥)}

(٤) س = ص + ١ ، س^{٢} + ص^{٢} = ١٣

بالتعويض من م$_{١}$ فى م$_{٢}$ عن قيمة س

(ص + ١)^{٢} + ص^{٢} = ١٣

ص^{٢} + ٢ ص + ١ + ص^{٢} = ١٣

٢ص^{٢} + ٢ ص + ١ − ١٣ = ٠

٢ص^{٢} + ٢ ص − ١٢ = ٠

٢(ص^{٢} + ص − ٦) = ٠

٢(ص + ٣)(ص − ٢) = ٠

٢ ≠ ٠	ص + ٣ = ٠	ص − ٢ = ٠
	ص = −٣	ص = ٢
	∵ س = ص + ١	∵ س = ص + ١
	∴ س = −٣ + ١	∴ س = ٢ + ١
	∴ س = −٢	∴ س = ٣

∴ م.ح = {(−٢ ، −٣) ، (٣ ، ٢)}

---

(٥) ص − س = ١ ، س^{٢} − ص^{٢} = −٥

∵ ص − س = ١ ∴ ص = س + ١

بالتعويض فى م$_{٢}$ عن قيمة ص

س^{٢} − (س + ١)^{٢} = −٥

س^{٢} − (س^{٢} + ٢ س + ١) = −٥

س^{٢} − س^{٢} − ٢ س − ١ = −٥

− ٢ س − ١ = −٥ ∴ − ٢ س = −٥ + ١

∴ − ٢ س = −٤ ∴ س = ٢

∵ ص = س + ١ ∴ ص = ٢ + ١ = ٣

م.ح = {(٢ ، ٣)}

(٦) س − ص = ١٠

، س^{٢} − ٤س ص + ص^{٢} = ٥٢

∵ س − ص = ١٠ ∴ س = ص + ١٠

بالتعويض فى م٢ عن قيمة س

س^{٢} − ٤س ص + ص^{٢} = ٥٢

(ص + ١٠)^{٢} − ٤ص(ص + ١٠) + ص^{٢} = ٥٢

ص^{٢} + ٢٠ص + ١٠٠ − ٤ص^{٢} − ٤٠ص + ص^{٢} = ٥٢

−٢ص^{٢} − ٢٠ص + ١٠٠ − ٥٢ = ٠

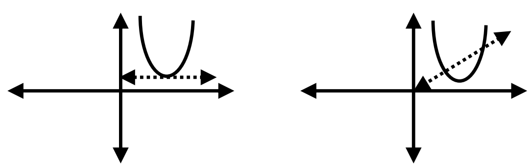
−٢ص^{٢} − ٢٠ص + ٤٨ = ٠ (÷ −٢)

ص^{٢} + ١٠ص − ٢٤ = ٠

(ص − ٢)(ص + ١٢) = ٠

ص − ٢ = ٠	ص + ١٢ = ٠
ص = ٢	ص = −١٢
∵ س = ص + ١٠	∵ س = ص + ١٠
∴ س = ٢ + ١٠	∴ س = −١٢ + ١٠
∴ س = ١٢	∴ س = −٢

∴ م.ح = {(١٢ ، ٢) ، (−٢ ، −١٢)}



(٧) س + ص = ٢، $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ٢$

$\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ٢$ بالضرب × س ص

$\frac{١}{س}$ × س ص + $\frac{١}{ص}$ × س ص = ٢ × س ص

ص + س = ٢ س ص

−٢ س ص + ص + س = ٠ م٢

∵ س + ص = ٢ م١

∴ س = ٢ − ص م١

بالتعويض فى م٢ عن قيمة س

−٢ س ص + ص + س = ٠ م٢

−٢ (٢ − ص) ص + ص + (٢ − ص) = ٠

−٤ص + ٢ص^{٢} + ص + ٢ − ص = ٠

٢ص^{٢} − ٤ص + ٢ = ٠ (÷ ٢)

ص^{٢} − ٢ص + ١ = ٠

(ص − ١)(ص − ١) = ٠

ص − ١ = ٠

ص = ١

∵ س = ٢ − ص

∴ س = ٢ − ١

∴ س = ١

م.ح = {(١ ، ١)}

(٨) مستطيل محيطه ١٤ سم و مساحته ١٢ سم^{٢}
أوجد بعدى المستطيل

نفرض الطول = س ، العرض = ص

مساحة المستطيل = الطول × العرض = ١٢

= س × ص = ١٢ م$_{١}$

محيط المستطيل =(الطول + العرض) ×٢=١٤

=(س + ص) ×٢=١٤

(س + ص) × ٢ = ١٤ (÷ ٢)

س + ص = ٧ م$_{٢}$

ص = ٧ - س م$_{٢}$

بالتعويض فى م$_{١}$ عن قيمة ص

س × (٧ - س) = ١٢ م$_{١}$

٧س - س^{٢} = ١٢

- س^{٢} + ٧س - ١٢ = ٠ (÷ - ١)

س^{٢} - ٧س + ١٢ = ٠

(س - ٣) (س - ٤) = ٠

س - ٣ = ٠	س - ٤ = ٠
س = ٣	س = ٤
∵ ص = ٧ - س	∵ ص = ٧ - س
∴ ص = ٧ - ٣	∴ ص = ٧ - ٤
∴ ص = ٤	∴ ص = ٣

∴ بعدى المستطيل ٤ سم ، ٣ سم

(٩) مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم
فإذا كان مساحة المستطيل ٢٨ سم^{٢}
أوجد محيط المستطيل

نفرض الطول = س ، العرض = ص

س - ص = ٣

س = ص + ٣ م$_{١}$

مساحة المستطيل = الطول × العرض = ٢٨

= س × ص = ٢٨ م$_{٢}$

بالتعويض من م$_{١}$ فى م$_{٢}$ عن قيمة س

(ص + ٣) × ص = ٢٨

ص^{٢} + ٣ ص = ٢٨

ص^{٢} + ٣ ص - ٢٨ = ٠

(ص - ٤) (ص + ٧) = ٠

ص - ٤ = ٠	ص + ٧ = ٠
ص = ٤	ص = - ٧
	مرفوض

∵ س = ص + ٣ م$_{١}$

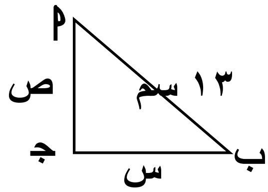
∴ س = ٤ + ٣ = ٧

∴ الطول = ٧ سم ، العرض = ٤ سم

محيط المستطيل =(الطول + العرض) ×٢

(٧ + ٤) × ٢ = ٢٢ سم

(١٠) مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ، محيطه يساوى ٣٠ سم ، أوجد طولى ضلعى القائمة



نفرض طولى ضلعى القائمة س ، ص

∵ محيط المثلث = ٣٠

∴ س + ص + ١٣ = ٣٠

س + ص = ٣٠ − ١٣

س + ص = ١٧

ص = ١٧ − س   م$_{١}$

فى Δ أ ب جـ القائم فى جـ

(أب)^{٢} = (بجـ)^{٢} + (أجـ)^{٢}

(س)^{٢} + (ص)^{٢} = (١٣)^{٢}

س^{٢} + ص^{٢} = ١٦٩   م$_{٢}$

بالتعويض من م$_{١}$ فى م$_{٢}$ عن قيمة ص

س^{٢} + (١٧ − س)^{٢} = ١٦٩

س^{٢} + ٢٨٩ − ٣٤ س + س^{٢} = ١٦٩

٢س^{٢} − ٣٤ س + ٢٨٩ − ١٦٩ = ٠

٢س^{٢} − ٣٤ س + ١٢٠ = ٠   (÷ ٢)

س^{٢} − ١٧ س + ٦٠ = ٠

(س − ٥)(س − ١٢) = ٠

س − ٥ = ٠	س − ١٢ = ٠
س = ٥	س = ١٢
∵ ص = ١٧ − س	∵ ص = ١٧ − س
∴ ص = ١٧ − ٥ = ١٢	∴ ص = ١٧ − ١٢ = ٥

∴ طولا ضلعى القائمة ١٢ سم ، ٥ سم

تدريبات

س١ أوجد فى ح^{٢} مجموعة حل كل من المعادلات الآتية

(١) س − ص = ٠ ، س ص = ٩

(٢) س − ص = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠

(٣) س − ص = ٢ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠

(٤) س + ص = ١٠ ، س^{٢} − ص^{٢} = ٤٠

(٥) ص − س = ٢ ، س^{٢} + س ص − ٤ = ٠

(٦) س + ٢ص = ٤ ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٧

(٧) س − ٢ص − ١ = ٠ ، س^{٢} − س ص = ٠

(٨) ص + ٢س = ٧ ، ٢س^{٢} + س + ٣ص = ١٩

س٢ عددان مجموعهما ٧ و حاصل ضربهما ١٢ أوجد العددين

س٣ مستطيل محيطه ٢٤ سم و مساحته ٣٥ سم^{٢} أوجد بعدى المستطيل

س٤ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم فإذا كان مساحة المستطيل ٤٥ سم^{٢} أوجد محيط المستطيل

س٥ مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٠ سم ، محيطه يساوى ٢٤ سم أوجد طولى ضلعى القائمة

مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود

مجموعة أصفار الدالة هى مجموعة قيم س التى تجعل قيمة الدالة د (س) = صفر
و يرمز لها بالرمز ص (د)
و هى مجموعة حل المعادلة د (س) = صفر

أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال الآتية

(١) د (س) = س

س = ٠
ص (د) = {صفر}

(٢) د (س) = ٧ س

٧ س = ٠ (÷ ٧)
س = ٠
ص (د) = {صفر}

(٣) د (س) = س - ٥

س - ٥ = ٠
س = ٥
ص (د) = { ٥ }

(٤) د (س) = س^{٢} - ٩

س^{٢} - ٩ = ٠
(س - ٣) (س + ٣) = ٠

س - ٣ = ٠	س + ٣ = ٠
س = ٣	س = - ٣

ص (د) = { ٣ ، - ٣ }

(٥) د (س) = س^{٢} + ٢٥

س^{٢} + ٢٥ لا تقبل التحليل ص (د) = ∅

(٦) د (س) = ٥
الدالة ثابتة و تساوى ٥ ولا يمكن أن تساوى صفر
ص (د) = ∅

(٧) د (س) = صفر
الدالة ثابتة و تساوى صفر و فى كل حالات التعويض تساوى صفر
ص (د) = ح

(٨) د (س) = س^{٢} - ٣س

س^{٢} - ٣س = ٠
س (س - ٣) = ٠

س = ٠	س - ٣ = ٠
	س = ٣

ص (د) = { ٠ ، ٣ }

(٩) د (س) = س^{٣} - ٨

س^{٣} - ٨ = ٠
(س - ٢) (س^{٢} + ٢ س + ٤) = ٠
س - ٢ = ٠
س = ٢
ص (د) = { ٢ }

القوس الأكبر في تحليل فرق بين مكعبين أو مجموع مكعبين لا يقبل التحليل

(١٠) د (س) = س^{٢} − ٦ س − ٤٠

س^{٢} − ٦ س − ٤٠ = ٠

(س + ٤)(س − ١٠) = ٠

س + ٤ = ٠	س − ١٠ = ٠
س = −٤	س = ١٠

ص (د) = { −٤ ، ١٠ }

---

(١١) د (س) = ٣س^{٢} − ١٠ س + ٨

$\boxed{\times}$

٣س^{٢} − ١٠ س + ٨ = ٠

س^{٢} − ١٠ س + ٢٤ = ٠

(س − ٤) (س − ٦) = ٠ $\boxed{\div ٣}$

(س − $\frac{٤}{٣}$) (س − $\frac{٦}{٣}$) = ٠

(٣س − ٤) (س − ٢) = ٠

٣س − ٤ = ٠	س − ٢ = ٠
٣س = ٤ (÷ ٣)	س = ٢

س = $\frac{٤}{٣}$ ص (د) = { $\frac{٤}{٣}$ ، ٢ }

---

(١٢) د (س) = (س − ٥) (س + ٧)

(س − ٥) (س + ٧) = ٠

س − ٥ = ٠	س + ٧ = ٠
س = ٥	س = −٧

ص (د) = { ٥ ، −٧ }

(١٣) د (س) = (س − ٢) (س + ٣) + ٤

س^{٢} + س − ٦ + ٤ = ٠

س^{٢} + س − ٢ = ٠

(س − ١) (س + ٢) = ٠

س − ١ = ٠	س + ٢ = ٠
س = ١	س = −٢

ص (د) = { ١ ، −٢ }

---

(١٤) د (س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٤س + ١٢

س^{٣} − ٣س^{٢} − ٤س + ١٢ = ٠ **تحليل بالتقسيم**

س^{٢} (س − ٣) − ٤ (س − ٣) = ٠

(س − ٣) (س^{٢} − ٤) = ٠

(س − ٣) (س − ٢) (س + ٢) = ٠

س − ٣ = ٠	س − ٢ = ٠	س + ٢ = ٠
س = ٣	س = ٢	س = −٢

ص (د) = { ٣ ، ٢ ، −٢ }

---

(١٥) **أكمل ما يأتى**

(١) إذا كان د (س) = م س − ١٢ ، ص (د) = { ٢ } فإن م = ٠٠٠٠

∵ ص (د) = { ٢ }

∴ د (٢) = ٠

∵ د (س) = م س − ١٢

∴ د (٢) = م × (٢) − ١٢ = ٠

٢م − ١٢ = ٠

٢م = ١٢ (÷ ٢)

م = ٦

(٢) إذا كان د (س) = أ س^{٢} + ب س + ١٥ ، ص (د) = { ٣ ، ٥ } فإن أ = ... ، ب = ...

∵ ص (د) = { ٣ ، ٥ }

∴ د (٣) = ٠ ، د (٥) = ٠

<u>أولاً</u>

د (٣) = أ × (٣)^{٢} + ب × (٣) + ١٥ = ٠

٩أ + ٣ب + ١٥ = ٠ (÷ ٣) م١

٣أ + ب + ٥ = ٠ م١

<u>ثانياً</u>

د (٥) = أ × (٥)^{٢} + ب × (٥) + ١٥ = ٠

٢٥أ + ٥ب + ١٥ = ٠ (÷ ٥) م٢

٥أ + ب + ٣ = ٠ م٢

بضرب م١ × − ١ و الجمع مع م٢

−٣أ − ب − ٥ = ٠ م١

٥أ + ب + ٣ = ٠ م٢

٢أ − ٢ = ٠

٢أ = ٢ (÷ ٢)

أ = ١ بالتعويض في م٢

٥ × (١) + ب + ٣ = ٠ م٢

٥ + ب + ٣ = ٠

ب + ٨ = ٠

ب = −٨

حل آخر ∵ ص(د) = { ٣ ، ٥ }

س = ٣ س = ٥

س − ٣ = ٠ س − ٥ = ٠

(س − ٣) (س − ٥) = ٠

س^{٢} − ٨ س + ١٥ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = −٨

تدريبات

س١ <u>أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال الآتية</u>

(١) د (س) = ٢س − ٤

(٢) د (س) = س^{٢} − ٩

(٣) د (س) = ٥

(٤) د (س) = ٠

(٥) د (س) = س^{٢} + ٤

(٦) د (س) = س^{٦} − ٣٢ س

(٧) د (س) = س^{٢} + س + ١

(٨) د (س) = − ٣ س

(٩) د (س) = س (س^{٢} − ٢ س + ١)

(١٠) د (س) = (س − ١) (س − ٢)

(١١) د (س) = س^{٢} − ٢ س

(١٢) د (س) = ٢س^{٤} + س^{٣} − ٦ س^{٢}

(١٣) د (س) = ٢٥ − ٩ س^{٢}

(١٤) د (س) = ٢س^{٣} − ١٨ س

(١٥) د (س) = س^{٣} − ١٢٥

(١٦) د (س) = ٢س^{٤} + ٥٤ س

(١٧) د (س) = ٦س^{٢} + س − ١٢

(١٨) د (س) = (س − ٢) (س + ٣) + ٤

(١٩) د (س) = س^{٣} + س^{٢} − ٢ س − ٨

(٢٠) د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٤ س + ١٢

س٢ <u>أوجد قيمة أ في كل مما يأتى</u>

(١) إذا كان د(س) = س^{٣} − أ ، ص (د) = { ٢ }

(٢) إذا كان د(س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + أ ، ص (د) = { ٥ }

(٣) إذا كان د(س) = س^{٢} + س + أ ، ص (د) = { ١ ، −٢ }

الدالة الكسرية الجبرية

مجموعة أصفار الدالة الكسرية

= مجموعة أصفار البسط – مجموعة أصفار المقام

مجال الكسر الجبرى = ح – مجموعة أصفار المقام

أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال الآتية

(١) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٨\,\text{س} + ١٥}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$

$\text{د(س)} = \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٥)}{(\text{س} + ٥)(\text{س} - ٥)}$

ص (د)

= مجموعة أصفار البسط – مجموعة أصفار المقام

$= \{٣ ، ٥\} - \{-٥ ، ٥\} = \{٣\}$

---

(٢) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٨\,\text{س} + ١٥}{\text{س}^{٢} - ١٦}$

$\text{د(س)} = \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٥)}{(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٤)}$

ص (د)

= مجموعة أصفار البسط – مجموعة أصفار المقام

$= \{٣ ، ٥\} - \{-٤ ، ٤\} = \{٣ ، ٥\}$

---

(٣) $\text{د(س)} = \dfrac{١٥}{\text{س}^{٢} - ٣٦}$

ص (د) $= \varnothing$

أوجد مجال كل من الدوال الآتية

(١) $\text{د (س)} = \text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} - ٤٠$

مجال د = ح – مجموعة أصفار المقام

(لا يوجد مقام)

مجال د $= \text{ح} - \varnothing = \text{ح}$

---

(٢) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ١٠\,\text{س} + ٢١}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$

$\text{د(س)} = \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٧)}{(\text{س} + ٥)(\text{س} - ٥)}$

مجال د $= \text{ح} - \{-٥ ، ٥\}$

---

(٣) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٨}{\text{س}^{٢} + ٢٥}$

مجال د $= \text{ح} - \varnothing = \text{ح}$

---

(٤) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٨\,\text{س} + ٧}{٩}$

مجال د $= \text{ح} - \varnothing = \text{ح}$

---

(٥) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ١١\,\text{س} + ١٠}{\text{س}}$

مجال د $= \text{ح} - \{\text{صفر}\}$

المجال المشترك لكسرين جبريين

(١) إذا كان ن$_1$(س) = $\dfrac{س^{٢}+٣س-١٠}{س^{٢}-٥س+٦}$ ، ن$_2$(س) = $\dfrac{س^{٢}+٢س-٨}{س^{٢}-٨س+١٢}$

أوجد المجال المشترك للدالتين

أولاً ن$_1$(س) = $\dfrac{س^{٢}+٣س-١٠}{س^{٢}-٥س+٦}$

$= \dfrac{(س+٥)\cancel{(س-٢)}}{(س-٣)\cancel{(س-٢)}}$

مجال ن$_1$ = ح − {٢ ، ٣}

ن$_1$(س) = $\dfrac{(س+٥)}{(س-٣)}$

ثانياً ن$_2$(س) = $\dfrac{س^{٢}+٢س-٨}{س^{٢}-٨س+١٢}$

$= \dfrac{(س+٤)\cancel{(س-٢)}}{(س-٦)\cancel{(س-٢)}}$

مجال ن$_2$ = ح − {٢ ، ٦}

ن$_2$(س) = $\dfrac{(س+٤)}{(س-٦)}$

المجال المشترك = ح − {٢، ٣ ، ٦}

تدريبات

س١ أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال الآتية

(١) $\dfrac{س^{٢}-١١س+٢٤}{س^{٢}-٩}$

(٢) $\dfrac{س^{٢}-٧س+١٠}{س^{٢}-٥س+٦}$

(٣) $\dfrac{س-٥}{س^{٢}-٢٥}$

س٢ أوجد المجال المشترك لكل مما يأتى

(١) $\dfrac{س+٣}{٤}$ ، $\dfrac{س-٢}{٢س}$

(٢) $\dfrac{١}{س}$ ، $س^{٢}-٢٥$

(٣) $\dfrac{س^{٢}+٩}{س^{٢}-١٦}$ ، $\dfrac{س^{٢}+١}{س^{٢}-س}$ ، $\dfrac{س^{٢}-١}{س^{٢}+٤}$

(٤) $\dfrac{٣}{س^{٢}-س}$ ، $\dfrac{س^{٢}-٩س+٢٠}{س^{٢}-س-١٢}$

(٥) $\dfrac{س}{س^{٣}-٤س}$ ، $\dfrac{س^{٢}-١٠س+٢٤}{س^{٢}-٣س-١٨}$

(٦) $\dfrac{س^{٢}-٩}{س^{٣}-١}$ ، $\dfrac{س^{٢}-١٣س+٣٦}{٢س^{٢}-١١س+١٢}$

(٧) $\dfrac{٢س-٣}{س^{٢}-١}$ ، $\dfrac{س^{٢}-١٦س-٣٦}{٣س^{٢}-س-١٠}$

تساوى كسرين جبريين

الدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ متساويتان إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

(١) مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$

(٢) $ن_١(س) = ن_٢(س)$ بعد الاختصار

---

(١) إذا كان $ن_١(س) = \frac{٥ س}{٥س - ١٠}$

، $ن_٢(س) = \frac{٢ س}{٢س - ٤}$

هل $ن_١ = ن_٢$ مع ذكر السبب ؟

أولاً $ن_١(س) = \frac{٥ س}{٥س - ١٠}$

$= \frac{٥ س}{٥(س - ٢)} = \frac{س}{(س - ٢)}$

مجال $ن_١$ = ح − { ٢ }

ثانياً $ن_٢(س) = \frac{٢ س}{٢س - ٤}$

$= \frac{٢ س}{٢(س - ٢)} = \frac{س}{(س - ٢)}$

مجال $ن_٢$ = ح − { ٢ }

∵ مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$

، $ن_١(س) = ن_٢(س)$ بعد الاختصار

∴ $ن_١ = ن_٢$

(٢) إذا كان $ن_١(س) = \frac{١}{س - ٥}$

، $ن_٢(س) = \frac{س}{س^٢ - ٥س}$

هل $ن_١ = ن_٢$ مع ذكر السبب ؟

أولاً $ن_١(س) = \frac{١}{س - ٥}$

مجال $ن_١$ = ح − { ٥ }

ثانياً $ن_٢(س) = \frac{س}{س^٢ - ٥س}$

$= \frac{س}{س(س - ٥)} = \frac{١}{(س - ٥)}$

مجال $ن_٢$ = ح − { ٠ ، ٥ }

∵ $ن_١(س) = ن_٢(س)$ بعد الاختصار

و لكن مجال $ن_١$ ≠ مجال $ن_٢$

∴ $ن_١ ≠ ن_٢$

(٣) إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٣س + ٢}$

، $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{س^{٢} - ٦س + ٥}$

اثبت أن $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$ فى المجال المشترك و أوجد هذا المجال

أولاً $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٣س + ٢}$

$= \frac{(س - ٢)(س + ٣)}{(س - ١)(س - ٢)}$

مجال $ن_{١}$ = ح − { ١ ، ٢ }

$ن_{١}(س) = \frac{(س + ٣)}{(س - ١)}$

ثانياً $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{س^{٢} - ٦س + ٥}$

$= \frac{(س + ٣)(س - ٥)}{(س - ١)(س - ٥)}$

مجال $ن_{٢}$ = ح − { ١ ، ٥ }

$ن_{٢}(س) = \frac{(س + ٣)}{(س - ١)}$

∵ $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$ بعد الاختصار

و لكن مجال $ن_{١}$ ≠ مجال $ن_{٢}$

∴ $ن_{١} \neq ن_{٢}$

المجال المشترك = ح − { ١ ، ٢ ، ٥ }

س١ إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{س + ٣}{س^{٢} - ٩}$

، $ن_{٢}(س) = \frac{٢}{٢س - ٦}$

هل $ن_{١} = ن_{٢}$ مع ذكر السبب ؟

س٢ إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{٢س}{٢س + ٤}$

، $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٢} + ٢س}{س^{٢} + ٤س + ٤}$

هل $ن_{١} = ن_{٢}$ مع ذكر السبب ؟

س٣ إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢}}{س^{٣} - س^{٢}}$

، $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٣} + س^{٢} + س}{س^{٤} - س}$

هل $ن_{١} = ن_{٢}$ مع ذكر السبب ؟

س٤ إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + س - ٦}$

، $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٣} - س^{٢} - ٦س}{س^{٣} - ٩س}$

اثبت أن $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$ فى المجال المشترك و أوجد هذا المجال

العمليات على الكسور الجبرية

أولاً جمع و طرح الكسور الجبرية

أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

(١) $\text{ن(س)} = \frac{\text{٢ س}}{\text{س + ٢}} + \frac{\text{٤}}{\text{س + ٢}}$

$\text{ن(س)} = \frac{\text{٢س + ٤}}{\text{س + ٢}} = \frac{\text{٢(س + ٢)}}{\text{س + ٢}} = \text{٢}$

مجال ن = ح − { −٢ }

---

(٢)

$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}\text{ − ٨ س + ١٢}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{ − ٤ س + ٤}} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}\text{ − ٤ س − ٥}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{ − ٧ س + ١٠}}$

$= \frac{\text{(س − ٢)(س − ٦)}}{\text{(س − ٢)(س − ٢)}} + \frac{\text{(س + ١)(س − ٥)}}{\text{(س − ٢)(س − ٥)}}$

مجال ن = ح − { ٢ ، ٥ }

$= \frac{\text{(س − ٦)}}{\text{(س − ٢)}} + \frac{\text{(س + ١)}}{\text{(س − ٢)}}$

$= \frac{\text{س − ٦ + س + ١}}{\text{(س − ٢)}} = \frac{\text{٢س − ٥}}{\text{س − ٢}}$

---

(٣)

$\text{ن(س)} = \frac{\text{٧ س − ٧}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{ − ٤ س + ٣}} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + س − ٢٠}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{ − ٦ س + ٨}}$

$= \frac{\text{٧(س − ١)}}{\text{(س − ١)(س − ٣)}} + \frac{\text{(س − ٤)(س + ٥)}}{\text{(س − ٢)(س − ٤)}}$

مجال ن = ح − { ١ ، ٣ ، ٢ ، ٤ }

$= \frac{\text{٧}}{\text{(س − ٣)}} + \frac{\text{(س + ٥)}}{\text{(س − ٢)}}$

$= \frac{\text{٧(س − ٢)}}{\text{(س − ٣)(س − ٢)}} + \frac{\text{(س + ٥)(س − ٣)}}{\text{(س − ٣)(س − ٢)}}$

$= \frac{\text{٧س − ١٤}}{\text{(س − ٣)(س − ٢)}} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + ٢س − ١٥}}{\text{(س − ٣)(س − ٢)}}$

$= \frac{\text{٧س − ١٤ + س}^{\text{٢}}\text{ + ٢س − ١٥}}{\text{(س − ٣)(س − ٢)}}$

$= \frac{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + ٩س − ٢٩}}{\text{(س − ٣)(س − ٢)}}$

(٤) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س} - ١} \quad \frac{٢}{\text{س} - ١}$

$= \frac{٣ - ٢}{\text{س} - ١} = \frac{١}{\text{س} - ١}$

مجال ن = ح − { ١ }

(٥) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٠}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦} - \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ١٠}{\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ١٥}$

$= \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٢)} - \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٥)}$

مجال ن = ح − { ٣ ، ٢ ، ٥ }

$= \frac{(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٣)} - \frac{(\text{س} + ٢)}{(\text{س} - ٣)}$

$= \frac{\text{س} - ٥ - \text{س} - ٢}{(\text{س} - ٣)} = \frac{-٧}{\text{س} - ٣}$

أبسط صورة للكسر $\frac{٤ - \text{س}}{\text{س} - ٤} = -١$ لأن

$\frac{٤ - \text{س}}{\text{س} - ٤} = \frac{-\text{س} + ٤}{\text{س} - ٤} = \frac{-(\text{س} - ٤)}{\text{س} - ٤} = -١$

(٦) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}{\text{س}^٣ - ٨} - \frac{٩ - \text{س}^٢}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}$

$= \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}{(\text{س} - ٢)(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)} + \frac{\text{س}^٢ - ٩}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٣)}$

$= \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}{(\text{س} - ٢)(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)} + \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٣)}$

مجال ن = ح − { ٢ ، −٣ }

$= \frac{١}{\text{س} - ٢} + \frac{(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٢)}$

$= \frac{١ + \text{س} - ٣}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٢} = ١$

مجال الكسر الجبرى = مجال معكوسه الجمعى

المعكوس الجمعى للكسر $\frac{١}{\text{س} - ٢}$

$= \frac{-١}{\text{س} - ٢} = \frac{١}{-(\text{س} - ٢)} = \frac{١}{-\text{س} + ٢}$

$= \frac{١}{٢ - \text{س}}$

مجال الكسر $\frac{١}{\text{س} - ٢}$ = ح − { ٢ }

مجال الكسر $\frac{١}{٢ - \text{س}}$ = ح − { ٢ }

تدريبات

س١ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

(١) $ن(س) = \frac{س}{س+٣} + \frac{٣}{س+٣}$

(٢) $ن(س) = \frac{٣س - ١٥}{س^{٢} - ٢٥} + \frac{٤س - ٨}{س^{٢} + ٣س - ١٠}$

(٣) $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٦س - ٢٧}{س^{٢} - ٩} + \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٢} + س - ٦}$

(٤) $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{س^{٣} - ٨} + \frac{س^{٢} - ٣س}{س^{٢} - ٢س}$

(٥) $ن(س) = \frac{٢س^{٢} - س - ٣}{٢س^{٢} + س - ٦} + \frac{٣س^{٢} + ١٠س + ٣}{٣س^{٢} + ٧س + ٢}$

(٦) $ن(س) = \frac{٣}{س - ١} - \frac{٢}{س - ١}$

(٧) $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٣س - ١٨}{س^{٢} - ٣٦} - \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٢} + ٤س - ١٢}$

(٨) $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٣س - ١٠}{س^{٢} - ٤} - \frac{٣س^{٢} - ٦س + ١٢}{س^{٣} + ٨}$

(٩) $ن(س) = \frac{س^{٢} - س - ٣٠}{س^{٢} - ٥س - ٦} - \frac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} - ٢س - ٣}$

(١٠) $ن(س) = \frac{٤س^{٢} + ١٨س - ١٠}{٤س^{٢} + ١٠س - ٦} - \frac{١٠س^{٢} - ١١س + ٣}{٥س^{٢} + ١٢س - ٩}$

س٢ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

(١) $ن(س) = \frac{٤س - ٨}{س^{٢} - ٤} + \frac{٥س + ٥}{س^{٢} + ٤س + ٣}$

(٢) $ن(س) = \frac{٣س + ٩}{س^{٢} - ٩} - \frac{٢س - ٢}{س^{٢} - ٥س + ٤}$

(٣) $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٥س}{س^{٢} - ٣س - ١٠} + \frac{س^{٣} - ٣س^{٢}}{س^{٢} + س - ٢}$

(٤) $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س^{٢} - ٤س + ٣} - \frac{س^{٢} + ٤س + ٣}{س^{٢} + ٣س + ٢}$

س٣ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

(١) $ن(س) = \frac{س^{٢}}{س - ١} + \frac{س}{١ - س}$

(٢) $ن(س) = \frac{٥}{س - ٣} + \frac{٤}{٣ - س}$

(٣) $ن(س) = \frac{٣}{س + ١} + \frac{٢س + ١}{١ - س^{٢}}$

(٤) $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} + ٥س + ٦} - \frac{٩ - س^{٢}}{س^{٢} - س - ٦}$

ثانياً ضرب و قسمة الكسور الجبرية

أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

(١)

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س^٢ + ٣س - ١٨} \times \frac{س + ٢}{س^٢ + س - ٢٠}$$

$$= \frac{(س-٣)(س+٥)}{(س-٣)(س+٦)} \times \frac{(س+٢)}{(س-٤)(س+٥)}$$

مجال ن $= ح - \{٣ ، -٦ ، ٤ ، -٥\}$

$$= \frac{(س+٢)}{(س+٦)(س-٤)}$$

---

(٢)

$$ن(س) = \frac{(س-٥)}{(س-١)} \div \frac{(س+٢)}{(س-٣)}$$

مجال ن $= ح - \{١ ، ٣، -٢\}$

$$ن(س) = \frac{(س-٥)}{(س-١)} \times \frac{(س-٣)}{(س+٢)}$$

$$= \frac{(س-٥)(س-٣)}{(س-١)(س+٢)}$$

المعكوس الضربى

للكسر الجبرى ن(س) هو $ن^{-١}(س)$

مجال $ن^{-١}(س)$

= ح - مجموعة أصفار البسط و المقام

(٣)

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٩} \div \frac{٢س - ١٠}{س^٢ - ٦س + ٩}$$

$$= \frac{(س+٣)(س-٥)}{(س-٣)(س+٣)} \div \frac{٢(س-٥)}{(س-٣)(س-٣)}$$

مجال ن $= ح - \{٣ ، -٣ ، ٥\}$

$$= \frac{(س+٣)(س-٥)}{(س-٣)(س+٣)} \times \frac{(س-٣)(س-٣)}{٢(س-٥)}$$

$$= \frac{(س-٣)}{٢}$$

إذا كان $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{(س^٢ - ٤)}$

أوجد $ن^{-١}(س)$ و عين مجاله

ثم أوجد $ن^{-١}(١)$ ، $ن^{-١}(٢)$ إن أمكن

$$ن(س) = \frac{س(س-٢)}{(س-٢)(س+٢)} = \frac{س}{(س+٢)}$$

مجال $ن^{-١} = ح - \{٢ ، -٢، ٠\}$

$$ن^{-١}(س) = \frac{(س+٢)}{س}$$

$$ن^{-١}(١) = \frac{(١+٢)}{١} = ٣$$

$ن^{-١}(٢)$ غير معرفة لأن ٢ $\not\ni$ مجال الدالة

تدريبات

(١) أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن ثم أوجد ن (٠) ، ن (١) إن أمكن

$$ن(س) = \frac{س^{٢} + س + ١}{س} \times \frac{س^{٢} - س}{س^{٣} - ١}$$

(٢) أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن ثم أوجد ن (٠) ، ن (٥) إن أمكن

$$ن(س) = \frac{٣س - ١٥}{س + ٣} \div \frac{٥س - ٢٥}{٤س + ١٢}$$

(٣) أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن ثم أوجد ن (٢) ، ن (−٢) إن أمكن

$$ن(س) = \frac{س^{٢} + ٢س}{س^{٣} - ٢٧} \div \frac{س + ٢}{س^{٢} + ٣س + ٩}$$

(٤) أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

$$ن(س) = \frac{س^{٢} - ١٢س + ٣٦}{س^{٢} - ٦س} \times \frac{٤س + ٢٤}{٣٦ - س^{٢}}$$

(٥) أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

$$ن(س) = \frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{س^{٢} - ٩} \div \frac{٢س - ١٠}{س^{٢} - ٦س + ٩}$$

(٦) أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

$$ن(س) = \frac{س + ١}{س^{٢} - س - ٢} \times \frac{س^{٢} + ٣س - ١٠}{٣س^{٢} + ١٦س + ٥}$$

(٧) أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

$$ن(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{٢س^{٢} + ٣س} \div \frac{٣س^{٢} + ٦س - ٤٥}{٤س^{٢} - ٩}$$

(٨) أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

$$ن(س) = \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س + ٣} \div \frac{س^{٢} - ١}{س + ١}$$

---

(٩) إذا كان $ن(س) = \frac{س - ٥}{س + ٣}$

فإن مجال المعكوس الجمعى لـ ن(س) = ...

(١٠) إذا كان $ن(س) = \frac{س - ٥}{س + ٣}$

فإن مجال $ن^{-١}(س)$ = ...

الإحتمال

إحتمال وقوع الحدث ﻡ يرمز له بالرمز ل (ﻡ)
عدد عناصر الحدث ﻡ يرمز له بالرمز ن (ﻡ)
عدد عناصر فضاء العينة يرمز له بالرمز ن (ف)

ل (ﻡ) = $\frac{\text{ن (ﻡ)}}{\text{ن (ف)}}$ صفر ⩽ ل (ﻡ) ⩽ ١

ل (ﻡ) ∈ [صفر، ١]

إحتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر
إحتمال وقوع الحدث المؤكد = ١

ل (∅) = صفر ، ل (ف) = ١

<u>مجموع</u> جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية = ١

---

١ فى تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية مرة واحدة فقط و ملاحظة الوجه العلوى إحسب الإحتمالات الآتية :

(ﻡ) ظهور صورة
ف = {صورة، كتابة} ن (ف) = ٢
الحدث ﻡ = { صورة } ن (ﻡ) = ١

ل (ﻡ) = $\frac{\text{ن (ﻡ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{١}{٢}$ = ٠و٥ = ٥٠٪

(ب) ظهور كتابة
ف = {صورة، كتابة} ن (ف) = ٢
الحدث ب = {كتابة} ن (ب) = ١

ل (ب) = $\frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{١}{٢}$ = ٠و٥ = ٥٠٪

٢ فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة الوجه العلوى إحسب الإحتمالات الآتية :

(١) ظهور عدد زوجى
{٢، ٤، ٦} $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(٢) ظهور عدد فردى
{١، ٣، ٥} $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(٣) ظهور عدد أولى
{٢، ٣، ٥} $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(٤) ظهور عدد أقل من ٤
{١، ٢، ٣} $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(٥) ظهور عدد أولى زوجى
{٢} $\frac{١}{٦}$

(٦) ظهور عدد أولى فردى
{٣، ٥} $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

(٧) ظهور عدد يقبل القسمة على ٣
{٣، ٦} $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

(٨) ظهور العدد ٥
{٥} $\frac{١}{٦}$

(٩) ظهور عدد أكبر من ٦
∅ $\frac{\text{صفر}}{٦}$ = صفر

(١٠) ظهورعدد صحيح يحقق المتباينة صفر < س < ٧
{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} $\frac{٦}{٦}$ = ١

قواعد الإحتمال

١ احتمال وقوع الحدث أ ل (أ) = ن (أ) / ن (ف)

حيث ن (أ) هو عدد عناصر الحدث
، ن (ف) هو عدد عناصر فضاء العينة

مثال صندوق يحتوى على ٧ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٧ . عند سحب بطاقة واحدة عشوائياً فإن

احتمال الحدث أ سحب بطاقة تحمل عدداً زوجياً

= ل (أ) = ن (أ) / ن (ف) = ٣ / ٧

احتمال الحدث ب سحب بطاقة تحمل عدداً فردياً

= ل (ب) = ن (ب) / ن (ف) = ٤ / ٧

---

٢ الحدث المكمل للحدث أ (عدم وقوع الحدث أ) ل (أ̄) = ن (أ̄) / ن (ف)

مثال صندوق يحتوى على ١٠ بطاقات مرقمة من ١ إلى ١٠ . عند سحب بطاقة واحدة عشوائياً فإن

احتمال الحدث أ سحب بطاقة تحمل عدداً أولياً
(٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧)

ل (أ) = ن (أ) / ن (ف) = ٤ / ١٠ = ٠و٤

احتمال عدم وقوع الحدث أ وهو سحب بطاقة تحمل عدداً غير أولياً
(١ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٠)

ل (أ̄) = ن (أ̄) / ن (ف) = ٦ / ١٠ = ٠و٦

وهنا نلاحظ أن
الحدث والحدث المكمل له حدثان متنافيان

أ ∩ أ̄ = ∅ ، ل(أ ∩ أ̄) = صفر

{ ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ∩ { ١ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }
= ∅

أ ∪ أ̄ = ف ، ل(أ ∪ أ̄) = ١

{ ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ∪ { ١ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }
= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }

ل (أ) + ل (أ̄) = ١
٠و٤ + ٠و٦ = ١

ل (أ) = ١ − ل (أ̄)
= ١ − ٠و٦ = ٠و٤

ل (أ̄) = ١ − ل (أ)
= ١ − ٠و٤ = ٠و٦

إذا كان ل (أ) = ل (أ̄) فإن ل (أ) = ...

ل (أ) = ١ / ٢

إذا كان ل(أ) = ٤ ل(أ̄) فإن ل(أ) = ...

∵ ل(أ) + ل(أ̄) = ١ ∴ ٤ ل(أ̄) + ل(أ̄) = ١

∴ ٥ل(أ̄) = ١ ÷ ٥

∴ ل(أ̄) = ٠و٢

∵ ل(أ) = ٤ ل(أ̄)

∴ ل(أ) = ٤ × ٠و٢ = ٠و٨

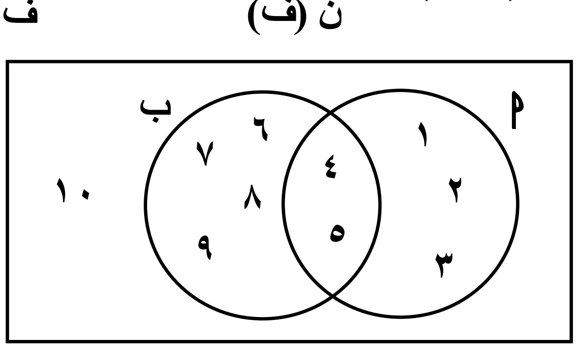
٣ التقاطع

(هو حدث وقوع أ و ب معاً)

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة فإن

ل (أ∩ب) = ن (أ∩ب) / ن (ف)

مثال



ل (أ∩ب) = ن (أ∩ب) / ن (ف) = ٢ / ١٠ = ٠و٢

و يمكن حساب التقاطع بالعلاقة التالية

ل (أ∩ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ∪ب)

= ٠و٥ + ٠و٦ − ٠و٩ = ٠و٢

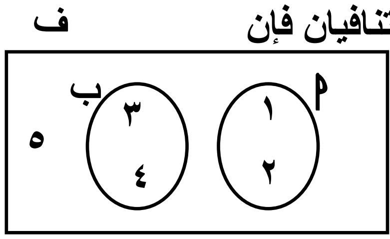
ل (أ∩ب)َ (هو حدث عدم وقوع أ و ب معاً)

ل (أ∩ب)َ = ١ − ل (أ∩ب)

= ١ − ٠و٢ = ٠و٨

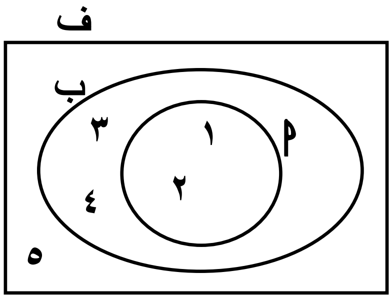
إذا كان أ،ب حدثان متنافيان فإن

ل (أ∩ب) = صفر



إذا كان أ⊂ب فإن

ل (أ∩ب) = ل (أ)



أ = { ١ ، ٢ } ، ب = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

أ∩ب = { ١ ، ٢ }

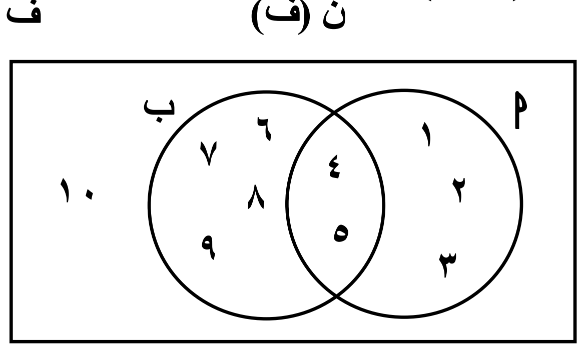
٤ الاتحاد

(هو حدث وقوع أ أو ب أو كلاهما أو أحدهما على الأقل)

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة فإن

ل (أ∪ب) = ن (أ∪ب) / ن (ف)

مثال



ل (أ∪ب) = ن (أ∪ب) / ن (ف) = ٩ / ١٠ = ٠و٩

و يمكن حساب الاتحاد بالعلاقة التالية

ل (أ∪ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ∩ب)

= ٠و٥ + ٠و٦ − ٠و٢ = ٠و٩

ل (أ∪ب)َ (هو حدث عدم وقوع أ أو ب)

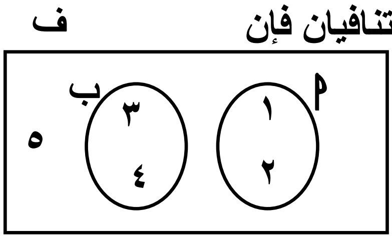
ل (أ∪ب)َ = ١ − ل (أ∪ب)

= ١ − ٠و٩ = ٠و١

إذا كان أ،ب حدثان متنافيان فإن

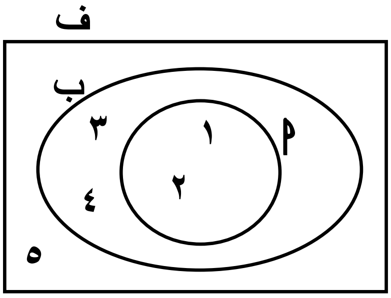
ل (أ∪ب) =

ل (أ) + ل (ب)



إذا كان أ⊂ب فإن

ل (أ∪ب) = ل (ب)



أ = { ١ ، ٢ } ، ب = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

أ∪ب = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

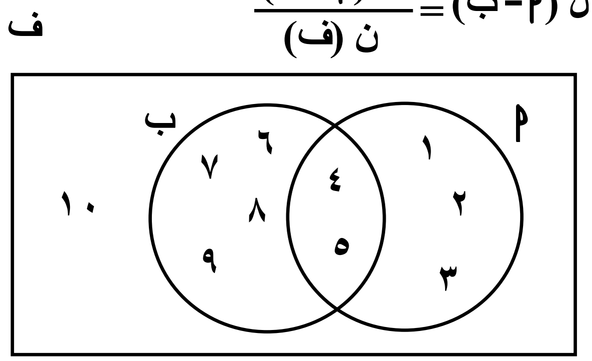
٥ الفرق بين حدثين ل (ﻡ – ب)

(هو حدث وقوع ﻡ وعدم وقوع ب
أو حدث وقوع ﻡ فقط)

إذا كان ﻡ ، ب حدثين من فضاء العينة فإن

$$\text{ل (ﻡ – ب)} = \frac{\text{ن (ﻡ – ب)}}{\text{ن (ف)}}$$

مثال



ﻡ – ب = {١ ، ٢ ، ٣} ، ب – ﻡ = {٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

$$\text{ل (ﻡ – ب)} = \frac{\text{ن (ﻡ – ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٣}{١٠} = \text{٣و٠}$$

$$\text{ل (ب – ﻡ)} = \frac{\text{ن (ب – ﻡ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٤}{١٠} = \text{٤و٠}$$

و يمكن حساب الفرق بالعلاقة التالية

ل (ﻡ – ب) = ل (ﻡ) – ل (ﻡ ∩ ب)
= ٥و٠ – ٢و٠ = ٣و٠

ل (ب – ﻡ) = ل (ب) – ل (ﻡ ∩ ب)
= ٦و٠ – ٢و٠ = ٤و٠

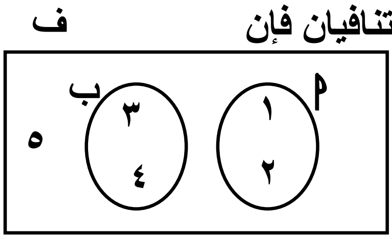
ل (ﻡ – ب)َ = ١ – ل (ﻡ – ب)
= ١ – ٣و٠ = ٧و٠

ل (ب – ﻡ)َ = ١ – ل (ب – ﻡ)
= ١ – ٤و٠ = ٦و٠

احتمال وقوع أحد الحدثين فقط
أو احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر

ل (ﻡ – ب) + ل (ب – ﻡ)
= ل (ﻡ) – ل (ﻡ ∩ ب) + ل (ب) – ل (ﻡ ∩ ب)
= ٥و٠ – ٢و٠ + ٦و٠ – ٢و٠ = ٧و٠

إذا كان ﻡ ، ب حدثان متنافيان فإن

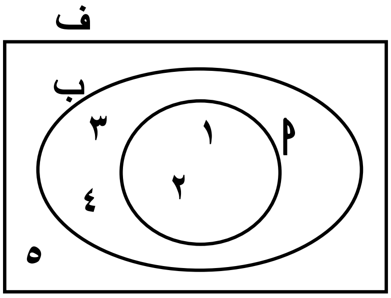


ل (ﻡ – ب) = ل (ﻡ)

، ل (ب – ﻡ) = ل (ب)

إذا كان ﻡ ⊂ ب فإن

ل (ﻡ – ب) = صفر



ﻡ = {١ ، ٢} ، ب = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

ﻡ – ب = ∅

ملخص قواعد الإحتمال

(١) احتمال وقوع الحدث أ $ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$

(٢) الحدث المكمل للحدث أ (عدم وقوع الحدث أ)

$ل(\bar{أ}) = \frac{ن(\bar{أ})}{ن(ف)}$

الحدث والحدث المكمل له حدثان متنافيان

$أ \cap \bar{أ} = \emptyset$ ، $ل(أ \cap \bar{أ}) =$ صفر

$أ \cup \bar{أ} = ف$ ، $ل(أ \cup \bar{أ}) = ١$

$ل(أ) + ل(\bar{أ}) = ١$

(٣) التقاطع (هو حدث وقوع أ و ب معاً)

$ل(أ\cap ب) = \frac{ن(أ\cap ب)}{ن(ف)}$

$ل(أ\cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ\cup ب)$

$ل\overline{(أ\cap ب)}$ (هو حدث عدم وقوع أ و ب معاً)

$ل\overline{(أ\cap ب)} = ١ - ل(أ\cap ب)$

إذا كان أ،ب حدثان متنافيان فإن $ل(أ\cap ب) =$ صفر

إذا كان $أ \subset ب$ فإن $ل(أ\cap ب) = ل(أ)$

(٤) الاتحاد (هو حدث وقوع أ أو ب أو كلاهما أو أحدهما على الأقل)

$ل(أ\cup ب) = \frac{ن(أ\cup ب)}{ن(ف)}$

$ل(أ\cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ\cap ب)$

$ل\overline{(أ\cup ب)}$ (هو حدث عدم وقوع أ أو ب)

$ل\overline{(أ\cup ب)} = ١ - ل(أ\cup ب)$

إذا كان أ،ب حدثان متنافيان فإن

$ل(أ\cup ب) = ل(أ) + ل(ب)$

إذا كان $أ \subset ب$ فإن $ل(أ\cup ب) = ل(ب)$

(٥) الفرق بين حدثين $ل(أ-ب)$

(هو حدث وقوع أ وعدم وقوع ب أو حدث وقوع أ فقط)

$ل(أ-ب) = \frac{ن(أ-ب)}{ن(ف)}$

$ل(أ-ب) = ل(أ) - ل(أ\cap ب)$

$ل(ب-أ) = ل(ب) - ل(أ\cap ب)$

$ل\overline{(أ-ب)} = ١ - ل(أ-ب)$

$ل\overline{(ب-أ)} = ١ - ل(ب-أ)$

احتمال وقوع أحد الحدثين فقط
أو احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر

$ل(أ-ب) + ل(ب-أ)$

$= ل(أ) - ل(أ\cap ب) + ل(ب) - ل(أ\cap ب)$

إذا كان أ،ب حدثان متنافيان فإن

$ل(أ-ب) = ل(أ)$ ، $ل(ب-أ) = ل(ب)$

إذا كان $أ \subset ب$ فإن $ل(أ-ب) =$ صفر

إذا كان $ب \subset أ$ فإن $ل(ب-أ) =$ صفر

تدريبات

س١ صندوق يحتوى على ١٢ كرة منها ٥ كرات زرقاء ، ٤ كرات حمراء ، باقى الكرات بيضاء . سحبت كرة واحدة عشوائياً من الصندوق . أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

(١) زرقاء

(٢) ليست حمراء

(٣) زرقاء أو حمراء

س٢ كيس به ٢٠ بطاقة متماثلة و مرقمة من ١ إلى ٢٠ ، سحبت منه بطاقة عشوائياً أوجد احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة :

(١) يقبل القسمة على ٥

(٢) فردياً و يقبل القسمة على ٥

(٣) يقبل القسمة على ٣

(٤) يقبل القسمة على ٣ و يقبل القسمة على ٥

(٥) يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة على ٥

س٣ ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة

(١) اكتب فضاء العينة

(٢) اكتب الأحداث التالية :

(أ) أ = حدث الحصول على عدد زوجى

(ب) ب = حدث الحصول على عدد فردى

(جـ) جـ = حدث الحصول على عدد أولى زوجى

(٣) أوجد كلاً من الاحتمالات التالية :

(أ) وقوع الحدثين أ وب معاً

(ب) وقوع الحدثين أ وجـ معاً

س٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية

، ل (أ) = ٦و٠ ، ل(ب) = ٧و٠ ، ل(أ$\cap$ب)= ٤و٠

أوجد

ل(أ$\cup$ب) ، ل(أ̅) ، ل(ب̅)، ل(أ$\cap$ب)̅ ، ل(أ$\cup$ب)̅

س٥ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية

، ل (أ) = ٥و٠ ، ل(ب) = ٦و٠ ، ل(أ$\cup$ب)= ٨و٠

أوجد

ل(أ$\cap$ب) ، ل(أ̅) ، ل(ب̅)، ل(أ$\cap$ب)̅ ، ل(أ$\cup$ب)̅

س٦ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ، ل (أ) = ٥و٠، ل(أ$\cup$ب)= ٨و٠

أوجد ل(ب) إذا كان

(١) أ ، ب حدثين متنافيين

(٢) ل(أ$\cap$ب)= ١و٠

(٣) إذا كان أ$\subset$ب

س٧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ، ل (أ) = ٣و٠، ل(أ$\cup$ب)= ٩و٠

أوجد ل(ب) إذا كان

(١) أ ، ب حدثين متنافيين

(٢) ل(أ$\cap$ب)= ٢و٠

(٣) إذا كان أ$\subset$ب

س٨ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية

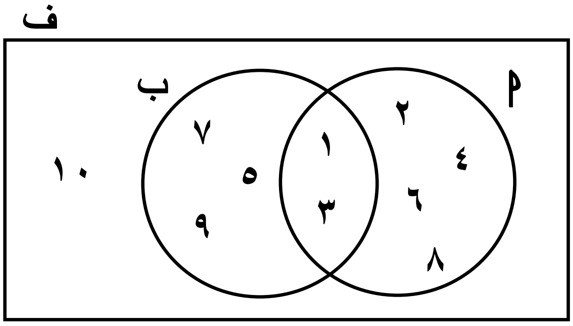
، ل (أ) = ٠و٦ ، ل(ب) = ٠و٥ ، ل(أ∩ب)= ٠و٣

أوجد

ل(أ∪ب) ، ل(أَ) ، ل(بَ)، ل(أ∩ب)َ ، ل(أ∪ب)َ

، ل (أ−ب) ، ل (ب− أ) ، ل (أ−ب)َ ، ل (ب − أ)َ

س٩ باستخدام الشكل التالى احسب الأحداث التالية:



(١) احتمال وقوع الحدث أ

(٢) احتمال وقوع الحدث ب

(٣) احتمال عدم وقوع الحدث أ

(٤) احتمال عدم وقوع الحدث ب

(٥) احتمال وقوع أ و ب معاً

(٦) احتمال عدم وقوع أ و ب معاً

(٧) احتمال وقوع أ أو ب

(٨) احتمال عدم وقوع أ أو ب

(٩) احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب

(١٠) احتمال وقوع أ فقط

(١١) احتمال وقوع ب وعدم وقوع أ

(١٢) احتمال وقوع ب فقط

(١٣) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط

(١٤) احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر

س١٠ <u>اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس</u>

(١) إذا ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوى

(صفر% ، ٢٥% ، ٥٠% ، ١٠٠%)

(٢) إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجي و ظهور عدد فردى معاً يساوى

(صفر، ٠و٥ ، ٠و٧٥، ١)

(٣) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن ل(أ∩ب)=

(∅ ، صفر ، ٠و٥٦، ١)

(٤) إذا كان أ ⊂ ب فإن ل(أ∩ب)=

(ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أ∩ب) ، ل (أ∪ب))

(٥) إذا كان أ ⊂ ب فإن ل(أ∪ب)=

(ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أ∩ب) ، ل (أ∪ب))

(٦) إذا كان ل (أ) = ل (أَ) فإن ل (أ) =

(صفر، ٠و٥ ، ٠و٧٥، ١)

(٧) إذا كان ل(أ) = ٣ ل(أَ) فإن ل (أ) =

(صفر، ٠و٥ ، ٠و٧٥، ١)

(٨) إذا كان أ،ب حدثان متنافيان فإن ل (أ − ب) =

(ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أ∩ب) ، ل (أ∪ب))

(٩) إذا كان أ،ب حدثان متنافيان فإن ل (ب − أ) =

(ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أ∩ب) ، ل (أ∪ب))

(١٠) إذا كان أ ⊂ ب فإن ل (أ − ب) =

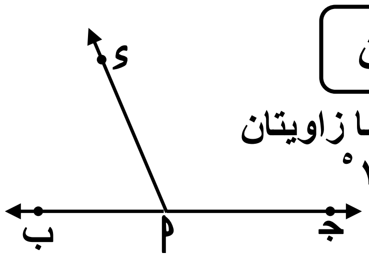
(ل (أ) ، ل (ب) ، صفر، ١)

مراجعة هندسة الصف الأول و الثانى

الزاويتان المتتامتان

الزاويتان المتتامتان هما زاويتان مجموع قياسيهما = ٩٠°

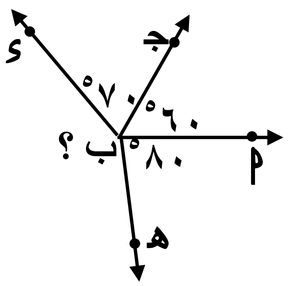
الزاويتان المتكاملتان



الزاويتان المتكاملتان هما زاويتان مجموع قياسيهما = ١٨٠°

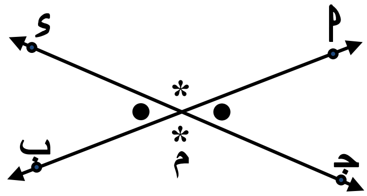
الزوايا المتجمعة حول نقطة

مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠°



التقابل بالرأس

إذا تقاطع مستقيمين فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان فى القياس



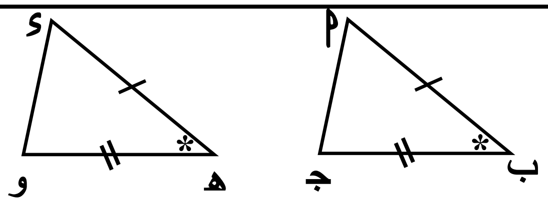
∵ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ = {م}

∴ ق(∠م م جـ) = ق(∠ء م ب) بالتقابل بالرأس

∴ ق(∠م م ء) = ق(∠جـ م ب) بالتقابل بالرأس

تطابق مثلثين

الحالة الأولى يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر



فى Δ م ب جـ ، Δ ء هـ و

فيهما:
- م ب = ء هـ
- ب جـ = هـ و
- ق(∠ب) = ق(∠هـ)

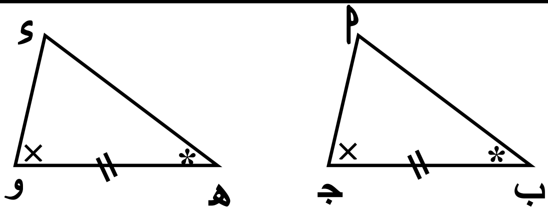
∴ يتطابق المثلثان و ينتج أن

م جـ = ء و

ق(∠م) = ق(∠ء)

ق(∠جـ) = ق(∠ و)

الحالة الثانية يتطابق المثلثان إذا تطابق زاويتان و الضلع المرسوم بين رأسيهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر



فى Δ م ب جـ ، Δ ء هـ و

فيهما:
- ب جـ = هـ و
- ق(∠ب) = ق(∠هـ)
- ق(∠جـ) = ق(∠و)

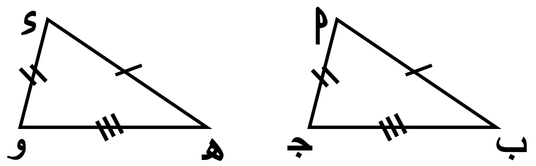
∴ يتطابق المثلثان و ينتج أن

م ب = ء هـ

م جـ = ء و

ق(∠م) = ق(∠ء)

الحالة الثالثة يتطابق المثلثان إذا تطابق كل ضلع فى أحد المثلثين مع نظيره فى المثلث الآخر



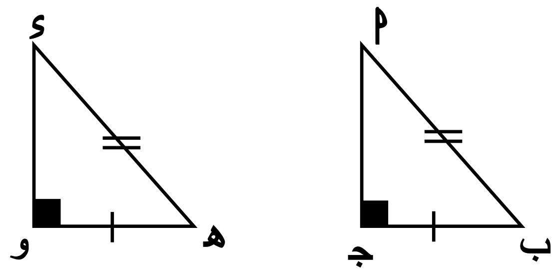
فى Δ ا ب جـ ، Δ ء هـ و

فيهما:
ا ب = ء هـ
ا جـ = ء و
ب جـ = هـ و

∴ يتطابق المثلثان و ينتج أن

ق(∠ ا) = ق(∠ ء)
ق(∠ب) = ق(∠هـ)
ق(∠جـ) = ق(∠ و)

الحالة الرابعة يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق وتر و أحد ضلعى القائمة فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر



فى Δ ا ب جـ ، Δ ء هـ و

فيهما:
ا ب = ء هـ
ب جـ = هـ و
ق(∠جـ) = ق(∠ و) = ٩٠°

∴ يتطابق المثلثان و ينتج أن

ا جـ = ء و
ق(∠ب) = ق(∠هـ)
ق(∠ ا) = ق(∠ ء)

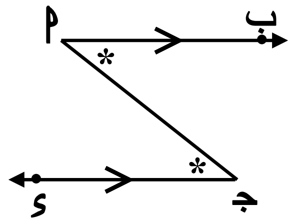
التوازى

إذا قطع مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فإن:

(١) كل زاويتين متبادلتين متساويتان فى القياس

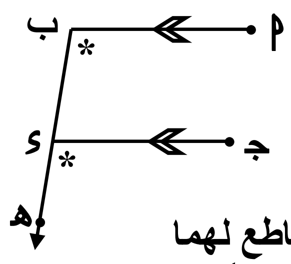
(٢) كل زاويتين متناظرتين متساويتان فى القياس

(٣) كل زاويتين داخلتين و فى جهة واحدة من القاطع متكاملتان (مجموع قياسيهما = ١٨٠°)



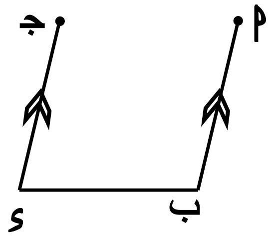
∵ ا ب // جـ ء ، ا جـ قاطع لهما

∴ ق(∠ ا) = ق(∠ جـ) بالتبادل



∵ ا ب // جـ ء ، ب هـ قاطع لهما

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ ء هـ) بالتناظر



∵ ا ب // جـ ء ، ب ء قاطع لهما

∴ ق(∠ب) + ق(∠ ء) = ١٨٠°

لأنهما داخلتان فى جهة واحدة من القاطع

المضلع

علاقات هامة

(١) محيط أى مضلع = مجموع أطوال أضلاعه

(٢) المضلع المنتظم هو مضلع جميع أضلاعه متساوية فى الطول و جميع زواياه متساوية فى القياس

(٣) عدد أقطار المضلع = $\frac{\text{ن}\,(\text{ن} - \text{٣})}{\text{٢}}$

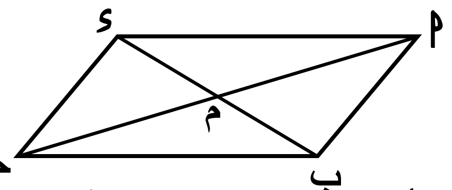
(٤) مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ن = $(\text{ن} - \text{٢}) \times \text{١٨٠}^\circ$

(٥) قياس كل زاوية داخلة لمضلع منتظم عدد أضلاعه ن = $\frac{(\text{ن} - \text{٢}) \times \text{١٨٠}^\circ}{\text{ن}}$

(٦) عدد أضلاع مضلع منتظم = $\frac{\text{٣٦٠}^\circ}{\text{١٨٠}^\circ - \text{س}^\circ}$

خواص الأشكال الرباعية

أولاً



متوازى الأضلاع هو شكل رباعى فيه

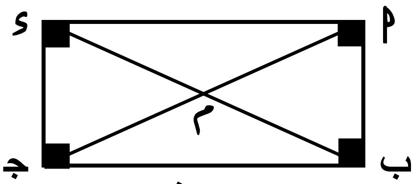
(١) كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتساويان فى الطول

(٢) كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس

(٣) كل زاويتين متتاليتين متكاملتان مجموع قياسيهما = ١٨٠°

(٤) القطران ينصف كلا منهما الآخر

ثانياً



المستطيل هوشكل رباعى فيه

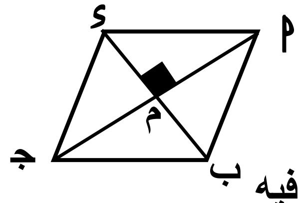
(١)كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتساويان فى الطول

(٢) زواياه جميعاً متساوية و قوائم

(٣)كل زاويتين متتاليتين متكاملتان مجموع قياسيهما = ١٨٠°

(٤)القطران ينصف كلا منهما الآخر ومتساويان فى الطول و غير متعامدان

ثالثاً



المعين هو شكل رباعى فيه

(١)كل ضلعين متقابلين متوازيان

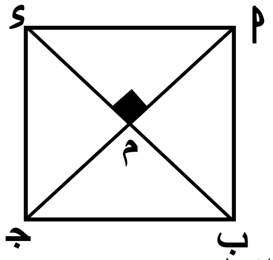
(٢)أضلاعه جميعاً متساوية فى الطول

(٣)كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس

(٤) كل زاويتين متتاليتين متكاملتان مجموع قياسيهما = ١٨٠°

(٥)القطران ينصف كلا منهما الآخر و متعامدان و غير متساويان و كل قطر ينصف زاويتى الرأس الخارج منهما

رابعاً



المربع هو شكل رباعى فيه

(١)كل ضلعين متقابلين متوازيان

(٢)أضلاعه جميعاً متساوية فى الطول

(٣)زواياه جميعاً متساوية و قوائم

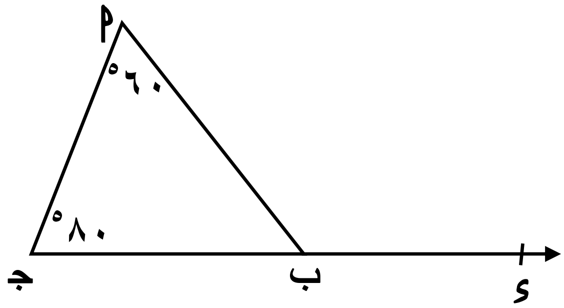
(٤)كل زاويتين متتاليتين متكاملتان مجموع قياسيهما = ١٨٠°

(٥)القطران ينصف كلا منهما الآخر و متعامدان و متساويان و كل قطر ينصف زاويتى الرأس الخارج منهما

المثلث

نظرية ١ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠°

قياس الزاوية الخارجة عن المثلث = مجموع قياس الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها



(∠ ﺃ ب ء) خارجة عن المثلث ﺃ ب جـ

ق (∠ ﺃ ب ء) = ق (∠ ﺃ) + ق (∠ جـ)

ق (∠ ﺃ ب ء) = ٦٠° + ٨٠° = ١٤٠°

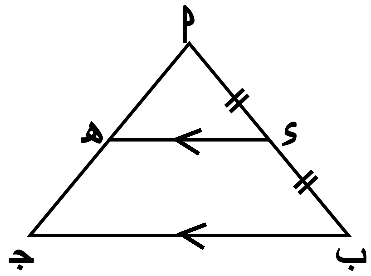
ملاحظات هامة فى Δ ﺃ ب جـ

(١) إذا كان ق (∠ ﺃ) = ق (∠ ب) + ق (∠ جـ)
فإن (∠ ﺃ) قائمة

(١) إذا كان ق (∠ ﺃ) > ق (∠ ب) + ق (∠ جـ)
فإن (∠ ﺃ) منفرجة

(١) إذا كان ق (∠ ﺃ) < ق (∠ ب) + ق (∠ جـ)
فإن (∠ ﺃ) حادة

نظرية ٢ الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى مثلث موازياً أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث



فى Δ ﺃ ب جـ

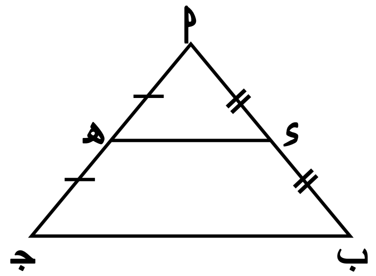
∵ $\overline{\text{ءهـ}}$ مرسوم من منتصف $\overline{\text{ﺃب}}$

∵ $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$

∴ $\overline{\text{ءهـ}}$ ينصف $\overline{\text{ﺃجـ}}$

نتيجة القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث

نظرية ٣ طول القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث يساوى نصف طول الضلع الثالث



فى Δ ﺃ ب جـ

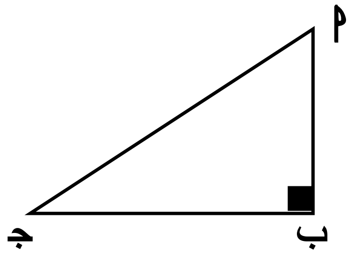
∵ $\overline{\text{ءهـ}}$ مرسوم من منتصفى $\overline{\text{ﺃب}}$ ، $\overline{\text{ﺃجـ}}$

∴ $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$

∴ ءهـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

نظرية فيثاغورث

نظرية فيثاغورث فى المثلث القائم الزاوية
مساحة المربع المنشأ على الوتر يساوى
مجموع مساحتى المربعين المنشأين على
ضلعى القائمة



فى Δ أ ب جـ القائم فى ب

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

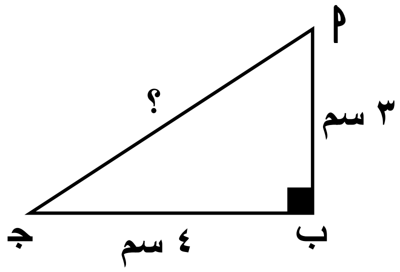
(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (ب جـ)^{٢}

(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (أ ب)^{٢}

تدريبات

أوجد طول الضلع المجهول فى كل مما يأتى

(١)



فى Δ أ ب جـ القائم فى ب

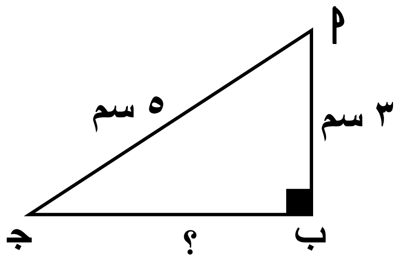
(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(أ جـ)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢}

(أ جـ)^{٢} = ٩+١٦ = ٢٥

أ جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

(٢)



فى Δ أ ب جـ القائم فى ب

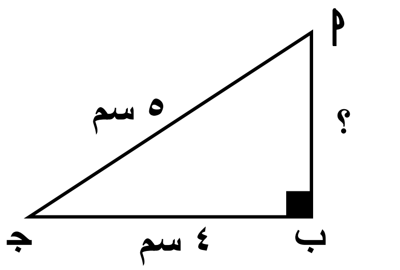
(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (أ ب)^{٢}

(ب جـ)^{٢} = (٥)^{٢} − (٣)^{٢}

(ب جـ)^{٢} = ٢٥ − ٩ = ١٦

ب جـ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم

(٣)



فى Δ أ ب جـ القائم فى ب

(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (ب جـ)^{٢}

(أ ب)^{٢} = (٥)^{٢} − (٤)^{٢}

(أ ب)^{٢} = ٢٥ − ١٦ = ٩

أ ب = $\sqrt{٩}$ = ٣ سم

التعرف على نوع المثلث بالنسبة لقياسات زواياه

فى Δ أ ب جـ

بفرض أن $\overline{\text{أب}}$ هو أكبر الأضلاع طولاً فى المثلث

(١) إذا كان $(\text{أب})^{2} = (\text{أجـ})^{2} + (\text{بجـ})^{2}$

فإن Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى جـ

(٢) إذا كان $(\text{أب})^{2} > (\text{أجـ})^{2} + (\text{بجـ})^{2}$

فإن Δ أ ب جـ منفرج الزاوية فى جـ

(٣) إذا كان $(\text{أب})^{2} < (\text{أجـ})^{2} + (\text{بجـ})^{2}$

فإن Δ أ ب جـ حاد الزوايا

متباينة المثلث

مجموع طولى أى ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث

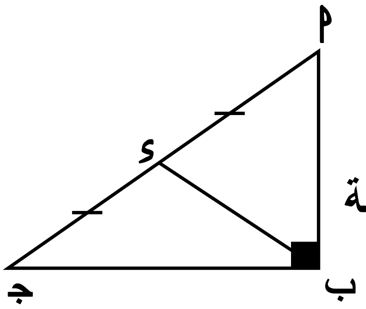
أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث فى المثلث إذا كان طول الضلعين الآخرين ٤ سم ، ٧ سم

طول الضلع الثالث ∋] الفرق، المجموع [

طول الضلع الثالث ∋] ٣، ١١ [

نظرية إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول يقابله زاوية أكبر في القياس من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر و العكس صحيح

نظرية ٣ طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث



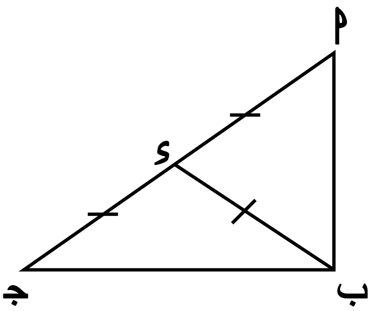
فى Δ أ ب جـ

القائم الزاوية في ب

∵ ب ى متوسط خارج من رأس القائمة

∴ ب ى = $\frac{1}{2}$ أ جـ

عكس نظرية ٣ إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



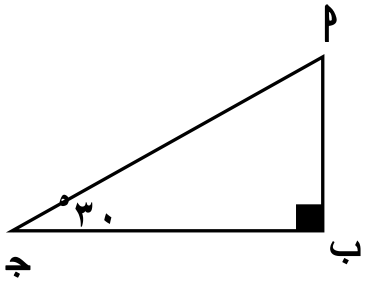
فى Δ أ ب جـ

∵ ب ى متوسط

∵ ب ى = $\frac{1}{2}$ أ جـ

∴ ق(∠ب) = ٩٠°

نتيجة طول الضلع المقابل لزاوية قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر



فى Δ أ ب جـ

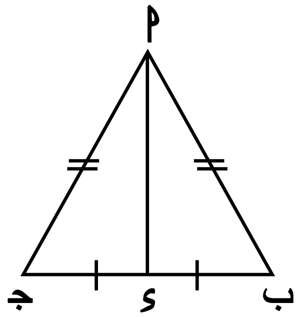
القائم الزاوية في ب

∵ ق(∠جـ) = ٣٠°

∴ أب = $\frac{1}{2}$ أ جـ

نتائج على نظريات المثلث متساوى الساقين

نتيجة ١ متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس و يكون عمودياً على القاعدة



فى Δ أ ب جـ

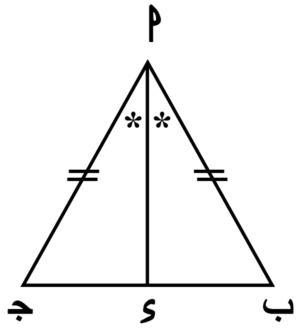
∵ أب = أجـ

∵ أء ينصف بجـ

∴ أء ينصف (∠ أ)

∴ أء ⊥ بجـ

نتيجة ٢ منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة و يكون عمودياً عليها



فى Δ أ ب جـ

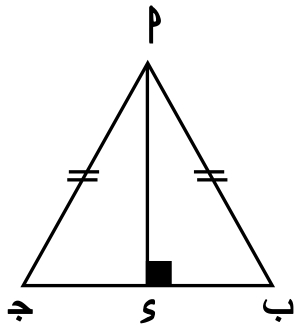
∵ أب = أجـ

∵ أء ينصف (∠ أ)

∴ أء ينصف بجـ

∴ أء ⊥ بجـ

نتيجة ٣ المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة و زاوية الرأس



فى Δ أ ب جـ

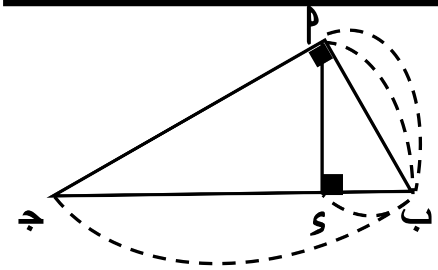
∵ أب = أجـ

∵ أء ⊥ بجـ

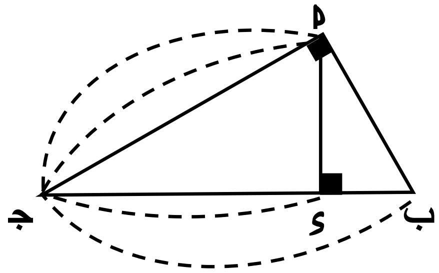
∴ أء ينصف بجـ

∴ أء ينصف (∠ أ)

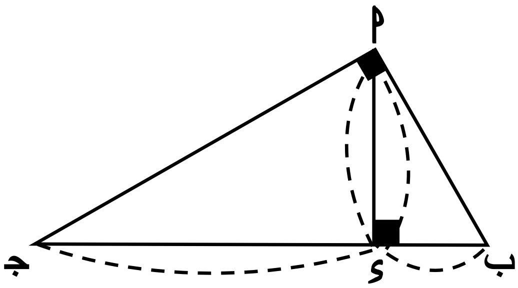
نظرية إقليدس



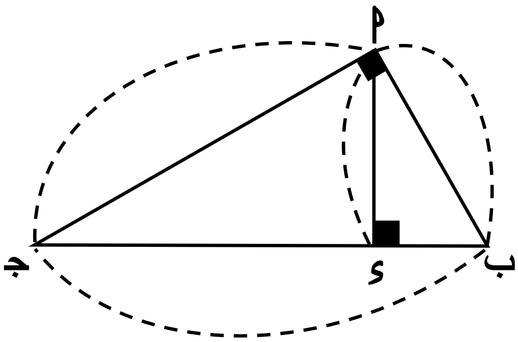
نظرية إقليدس (أب)^{٢} = ب ء × ب جـ



نظرية إقليدس (أجـ)^{٢} = جـ ء × جـ ب



نتيجة (١) (أء)^{٢} = ءب × ءجـ

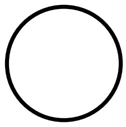


نتيجة (٢)

أب × أجـ = أء × بجـ

تعاريف و مفاهيم أساسية

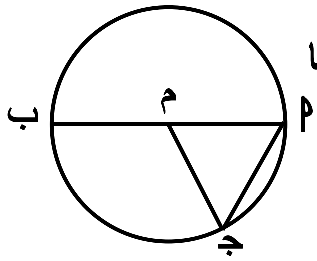
تعاريف



(١) الدائرة

هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بُعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة فى المستوى و هذه النقطة تسمى مركز الدائرة و يسمى البعد الثابت (طول نصف قطر الدائرة)

(٢) نصف القطر



هو قطعة مستقيمة طرفاها مركز الدائرة و أى نقطة على الدائرة مثل

$\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$

ملحوظة ١ :

أنصاف أقطار الدائرة الواحدة متساوية فى الطول

(٣) الوتر

هو قطعة مستقيمة تصل بين أى نقطتين على الدائرة مثل $\overline{\text{أ جـ}}$

(٤) القطر هو

- قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة و تمر بمركز الدائرة
- وتر يمر بمركز الدائرة
- أكبر أوتار الدائرة طولاً مثل $\overline{\text{أ ب}}$

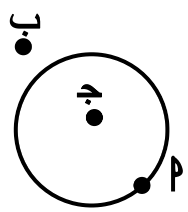
تجزئة المستوى

الدائرة تقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط

نقط داخل الدائرة مثل جـ

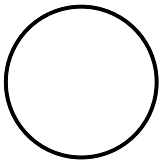
نقط خارج الدائرة مثل ب

نقط على الدائرة مثل أ

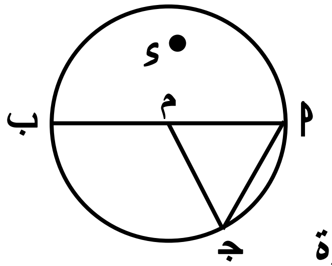


سطح الدائرة

هومجموعة نقط الدائرة $\cup$ مجموعة النقط داخل الدائرة



فى الشكل المقابل



- م $\in$ سطح الدائرة
- م $\notin$ الدائرة
- أ $\in$ سطح الدائرة
- أ $\in$ الدائرة
- ء $\in$ سطح الدائرة
- ء $\notin$ الدائرة
- ب $\in$ سطح الدائرة
- ب $\in$ الدائرة

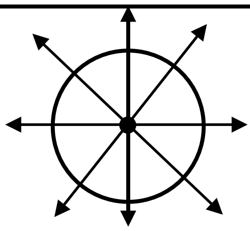
$\overline{\text{أ ب}}$ $\cap$ الدائرة = { أ ، ب }

$\overline{\text{أ ب}}$ $\cap$ سطح الدائرة = $\overline{\text{أ ب}}$

$\overline{\text{م جـ}}$ $\cap$ الدائرة = { جـ }

$\overline{\text{م جـ}}$ $\cap$ سطح الدائرة = $\overline{\text{م جـ}}$

التماثل فى الدائرة

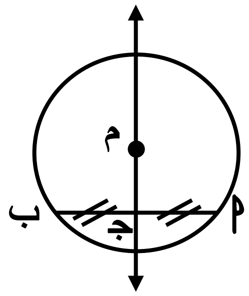


أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها

أى أن الدائرة لها عدد لانهائى من محاور التماثل

نتائج هامة

نتيجة ١ : المستقيم المار بمركز الدائرة و بمنتصف أى وتر فيها يكون عمودياً على هذا الوتر

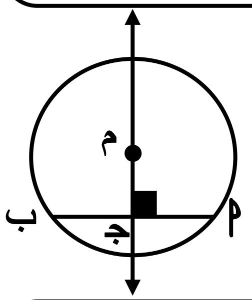


∵ م جـ يمر بمركز الدائرة

∵ م جـ ينصف ٯ ب

∴ م جـ ⊥ ٯ ب

نتيجة ٢ : المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر

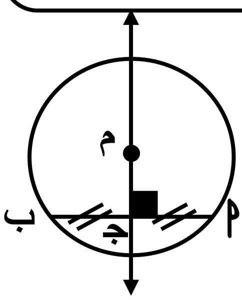


∵ م جـ يمر بمركز الدائرة

∵ م جـ ⊥ ٯ ب

∴ م جـ ينصف ٯ ب

نتيجة ٣ : المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر بمركز الدائرة



∵ م جـ ⊥ ٯ ب

∵ م جـ ينصف ٯ ب

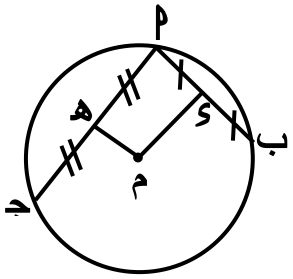
∴ م جـ يمر بمركز الدائرة

(١) فى الشكل المقابل

ء ، هـ منتصفى ٯ ب ، ٯ جـ

، ق(∠ٯ) = ٨٠° أوجد ق(∠ء م هـ)

البرهان



∵ م ء يمر بمركزالدائرة

∵ م ء ينصف ٯ ب

∴ م ء ⊥ ٯ ب

∴ ق(∠ٯ ء م)=٩٠°

∵ م هـ يمر بمركزالدائرة

∵ م هـ ينصف ٯ جـ

∴ م هـ ⊥ ٯ جـ

∴ ق(∠ٯ هـ م)=٩٠°

∵مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى= ٣٦٠° فى الشكل الرباعى ٯ ء م هـ

ق(∠ء م هـ) =

٣٦٠° - (٩٠+٩٠+٨٠)=١٠٠ °

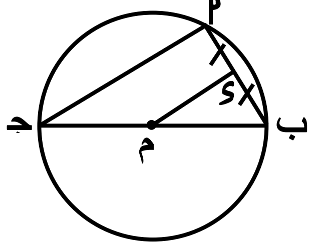
---

(٢) فى الشكل المقابل

ٯ ب وتر فى الدائرة م ، ب جـ قطر فيها

، ء منتصف ٯ ب اثبت أن ء م // ٯ جـ ثم احسب ق(∠ٯ)

البرهان



∵ م مركز الدائرة

∴ م منتصف القطر ب جـ

فى Δ ٯ ب جـ

∵ ء م مرسوم من منتصفى ٯ ب ، ب جـ

∴ ء م // ٯ جـ م١

∴ ء م = ١/٢ ٯ جـ

∵ م ء يمر بمركز الدائرة

∵ م ء ينصف ٯ ب

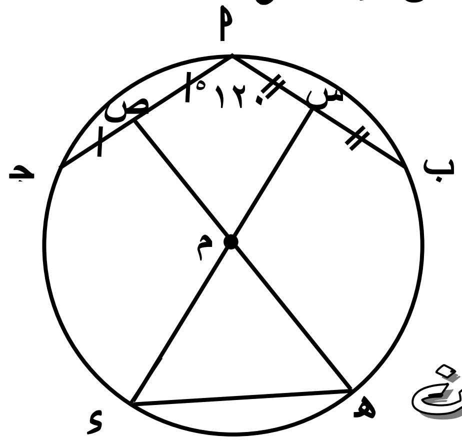
∴ م ء ⊥ ٯ ب

∴ ق(∠ب ء م)=٩٠° ، ∵ ء م // ٯ جـ

∴ ق(∠ٯ)= ق(∠ب ء م)=٩٠°بالتناظر م٢

(٣) فى الشكل المقابل

ق(∠أ)=١٢٠° ، س ، ص منتصفى أب ، أجـ اثبت أن ء هـ = نق



البرهان

∵ م س يمر بمركز الدائرة

∵ م س ينصف أب

∴ م س ⊥ أب

∴ ق(∠أ س م)=٩٠°

∵ م ص يمر بمركز الدائرة

∵ م ص ينصف أجـ

∴ م ص ⊥ أجـ

∴ ق(∠أ ص م)=٩٠°

∵مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠°

فى الشكل الرباعى أ س م ص

ق(∠س م ص) =

٣٦٠° - (٩٠+٩٠+١٢٠)=٦٠°

ق(∠هـ م ء) = ق(∠س م ص) = ٦٠°

بالتقابل بالرأس

فى ∆ م هـ ء

∵ م هـ = م ء = نق

∴ ق(∠هـ) = ق(∠ء) = $\frac{١٨٠ - ٦٠}{٢}$ = ٦٠°

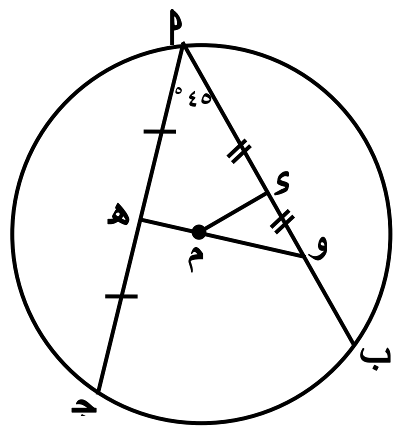
∴ ∆ م هـ ء متساوى الأضلاع

∴ ءهـ = م هـ = م ء = نق

(٤) فى الشكل المقابل

ق(∠أ)=٤٥° ، ء ، هـ منتصفى أب ، أجـ

اثبت أن ∆ م ء و متساوى الساقين



البرهان

∵ م هـ يمر بمركز الدائرة

∵ م هـ ينصف أجـ

∴ م هـ ⊥ أجـ

∴ ق(∠أ هـ م)=٩٠°

فى ∆ أ هـ و

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠و) = ١٨٠° - (٩٠+٤٥) = ٤٥° **1**

∵ م ء يمر بمركز الدائرة

∵ م ء ينصف أب

∴ م ء ⊥ أب

∴ ق(∠و ء م)=٩٠°

فى ∆ ء م و

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

ق(∠ء م و) = ١٨٠° - (٩٠+٤٥) = ٤٥° **2**

من ١ ، ٢

∴ ق(∠و) = ق(∠ء م و) = ٤٥°

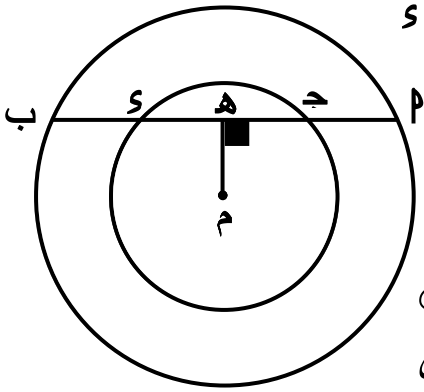
∴ و ء = م ء

∴ ∆ م ء و متساوى الساقين

(٥) فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز ، $\overline{\text{مهـ}} \perp \overline{\text{أب}}$

اثبت أن أجـ = ب ى



البرهان

فى الدائرة الكبرى

∵ مهـ يمر بمركزالدائرة

∵ مهـ ⊥ أب

∴ مهـ ينصف أب

∴ أهـ = هـ ب (١)

فى الدائرة الصغرى

∵ مهـ يمر بمركزالدائرة

∵ مهـ ⊥ جـ ى

∴ مهـ ينصف جـ ى

∴ جـهـ = هـ ى (٢)

بطرح ٢ من ١ ينتج أن أجـ = ب ى

---

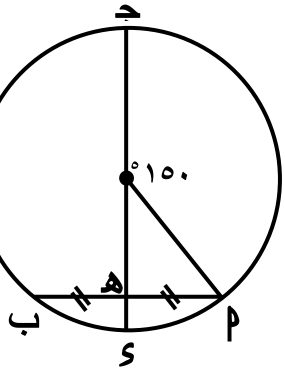
(٦) فى الشكل المقابل

أب وتر فى الدائرة م ، جـى قطر فيها ،

ق(∠أمجـ) = ١٥٠°

، هـ منتصف أب ، أب = ٨ سم

أوجد بعد الوتر أب عن مركز الدائرة و طول جـى



البرهان

فى الدائرة م

∵ مهـ يمر بمركز الدائرة

∵ مهـ ينصف أب

∴ مهـ ⊥ أب

∴ ق(∠أهـم) = ٩٠°

∵ م ∈ جـى ∵ ق(∠أمجـ) = ١٥٠°

∴ ق(∠أمهـ) = ١٨٠° - ١٥٠° = ٣٠°

فى Δ أمهـ القائم فى هـ

∵ ق(∠أمهـ) = ٣٠°

∴ أهـ = أم

∵، هـ منتصف أب (معطى)

∴ أهـ = ٨ ÷ ٢ = ٤سم

∴ أم = ٤ × ٢ = ٨سم

فى Δ أمهـ القائم فى هـ

(مهـ)^2 = (أم)^2 – (أهـ)^2

(مهـ)^2 = (٨)^2 – (٤)^2 = ٤٨

∴ مهـ = √٤٨ = ٤√٣ سم (م١)

∵ أم = ٨سم (برهاناً)

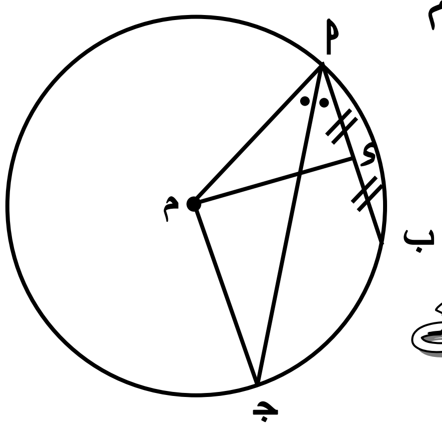
∵ أم = مجـ = مى = نق

∴ جـى = ٨+٨ = ١٦ سم (م٢)

(٧) فى الشكل المقابل

أب وتر فى الدائرة م ، أجـ ينصف (∠ب أ م) ، ء منتصف أب ،

اثبت أن ء م ⊥ جـ م



البرهان

في الدائرة م

∵ م ء يمر بمركزالدائرة

∵ م ء ينصف أب

∴ م ء ⊥ أب

∴ ق(∠أ ء م) = ٩٠°

∵ م أ = م جـ = نق

∴ Δ م أ جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠م أ جـ) = ق(∠م جـ أ) **١**

، ∵ أجـ ينصف (∠ب أ م)

∴ ق(∠م أ جـ) = ق(∠ب أ جـ) **٢**

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠م جـ أ)

و هما في وضع تبادل

∴ أب // م جـ

∴ ق(∠ء م جـ) = ق(∠أ ء م) = ٩٠°

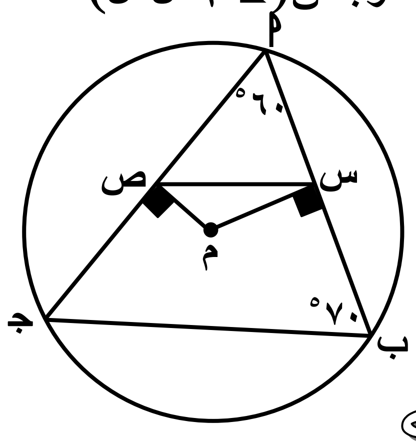
بالتبادل

∴ ء م ⊥ جـ م

(٨) فى الشكل المقابل

أب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، م س ⊥ أب ، م ص ⊥ أجـ ، ق(∠أ) = ٦٠° ،

ق(∠ب) = ٧٠° أوجد ق(∠م ص س)



البرهان

فى Δ أب جـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

ق(∠جـ) = ١٨٠° - (٧٠ + ٦٠) = ٥٠°

∵ م س يمر بمركز الدائرة

∵ م س ⊥ أب

∴ م س ينصف أب

∵ م ص يمر بمركز الدائرة

∵ م ص ⊥ أجـ

∴ م ص ينصف أجـ

فى Δ أب جـ

∵ س ص مرسوم من منتصفى أب ، أجـ

∴ س ص // ب جـ

∴ ق(∠أ ص س) = ق(∠جـ) = ٥٠°

بالتناظر

∵ ق(∠أ ص م) = ٩٠°

∴ ق(∠م ص س) = ٩٠° - ٥٠° = ٤٠°

تدريبات

س١ أكمل ما يأتى :

(١) القطعة المستقيمة التى طرفاها مركز الدائرة و أى نقطة على الدائرة تسمى ....

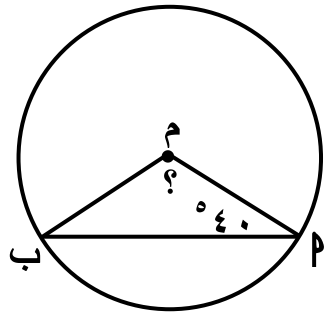
(٢) أنصاف أقطار الدائرة الواحدة .... فى الطول

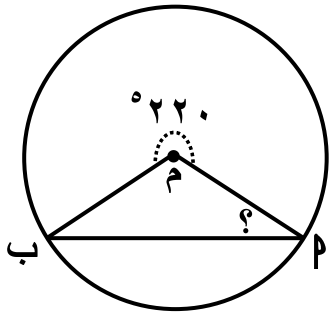
(٣) إذا كان أ ∈ الدائرة م فإن م أ = ...

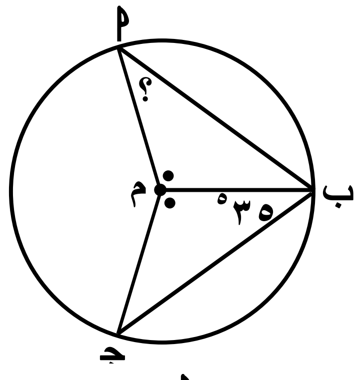
(٤) القطعة المستقيمة التى تصل بين نقطتين على الدائرة و تمر بمركز الدائرة تسمى ....

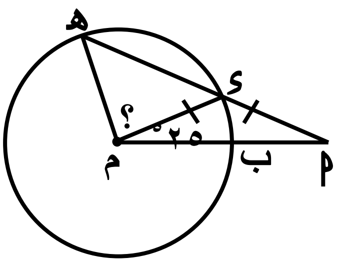
(٥) فى الدائرة م إذا كان $\overline{\text{ل ن}}$ قطر ، $\overline{\text{م و}}$ نصف قطر فإن ل و .... ٢ م ن

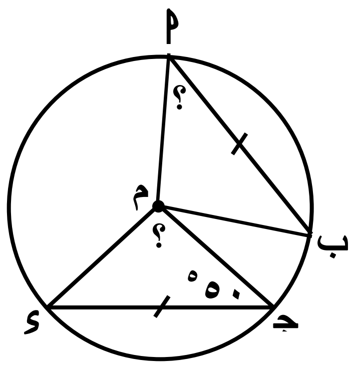
س٢ أوجد قياسات الزوايا المجهولة فى كل مما يأتى

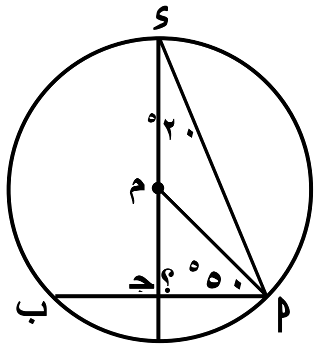










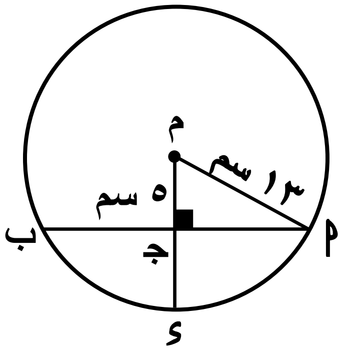


س٣ بالاستعانة بالشكل المقابل أكمل ما يأتى :

(١)

أ ب = ... سم

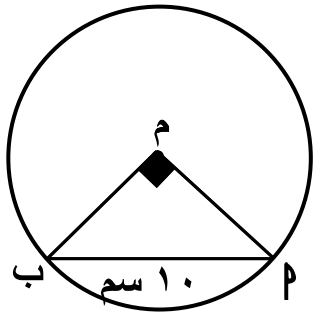
جـ ء = ... سم



(٢)

ق(∠أ) = ...°

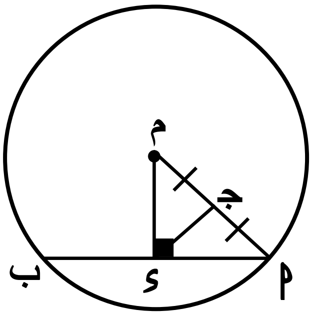
م أ = ... سم



(٣)

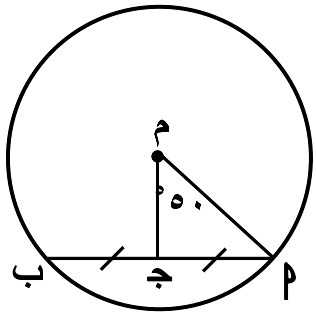
جـ ء = ٧ سم ، $\pi = \frac{22}{7}$

مساحة الدائرة = ... سم^2



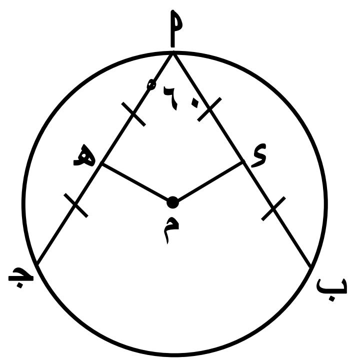
(٤)

ق(∠أ) = ...°

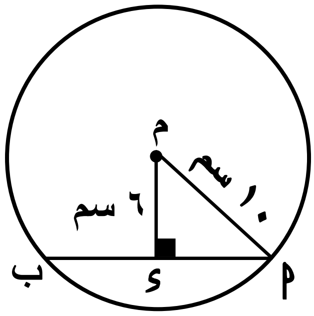


(٥)

ق(∠م) = ...°

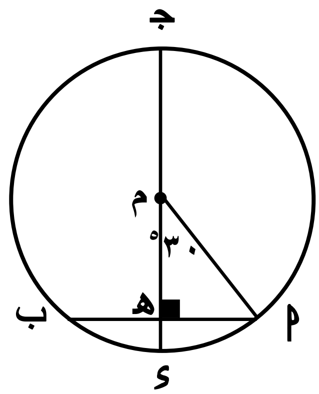


(٦)



أب = ... سم

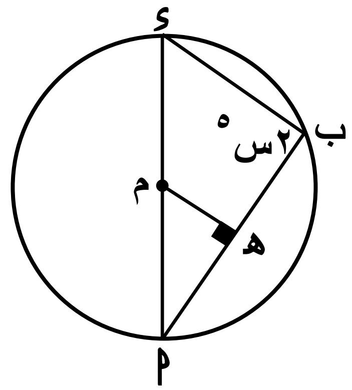
(٧)



أب = ١٠ سم

جـ ء = ... سم

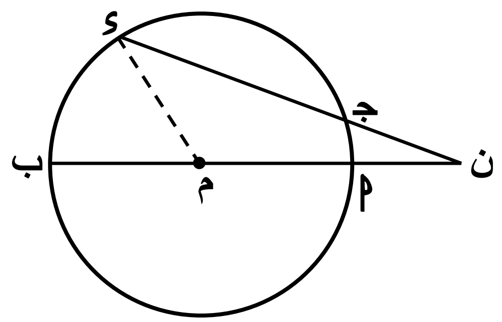
(٨)



س = ...

س٤ فى الشكل المقابل $\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة م

اثبت أن ن ب > ن ء

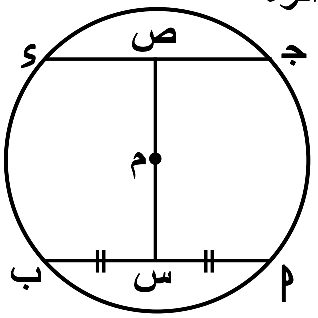


س٥ فى الشكل المقابل: م دائرة

، $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

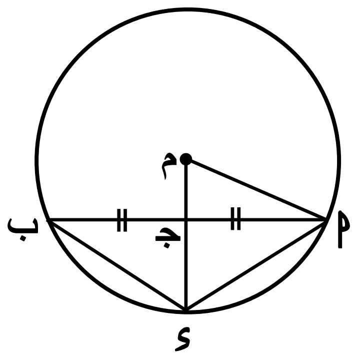
س منتصف $\overline{\text{أب}}$

اثبت أن ص منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$



س٦ فى الشكل المقابل: م دائرة طول نصف قطرها ١٣ سم ، $\overline{\text{أب}}$ وتر طوله ٢٤ سم ، جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

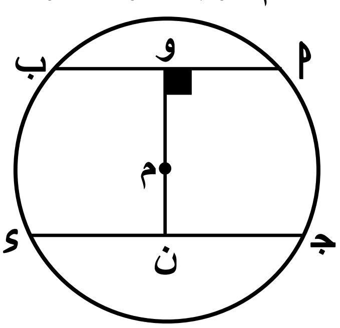
أوجد مساحة Δ أ ء ب



س٧ فى الشكل المقابل : م دائرة

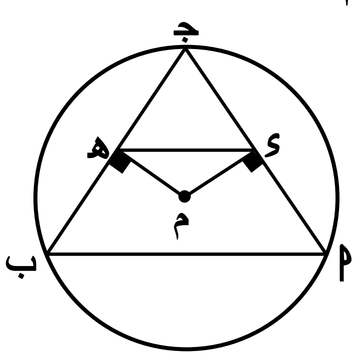
طول نصف قطرها ١٠ سم ، $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

، أب = ١٢ سم ، جـ ء = ١٦ سم أوجد طول ن و



س٨ اثبت أن (١) $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$

(٢) محيط Δ ء هـ جـ $= \frac{1}{2}$ محيط Δ أب جـ



وضع نقطة و مستقيم و دائرة بالنسبة لدائرة

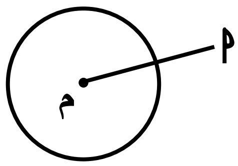
أولاً موضع نقطة بالنسبة للدائرة

إذا كانت أ نقطة فى مستوى الدائرة م التى طول نصف قطرها نق فإن أوضاع نقطة أ هى :

١ خارج الدائرة

م أ > نق

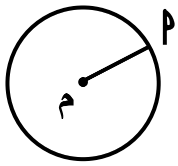
م أ ∈]نق ، ∞[



٢ على الدائرة

م أ = نق

$\overline{\text{م أ}}$ ∩ الدائرة م = { أ }

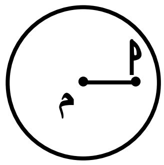


٣ داخل الدائرة

م أ < نق

م أ ∈ [صفر ، نق[

$\overline{\text{م أ}}$ ∩ الدائرة م = ∅



م دائرة طول قطرها ٦ سم ، أ نقطة فى مستوى الدائرة ، حدد موضع نقطة أ بالنسبة للدائرة إذا كان :

١ م أ = ٦ سم   أ .... الدائرة

٢ م أ = ٣ سم   أ .... الدائرة

٣ م أ = ٢ سم   أ .... الدائرة

٤ م أ = صفر سم   أ .... الدائرة

ثانياً موضع مستقيم بالنسبة للدائرة

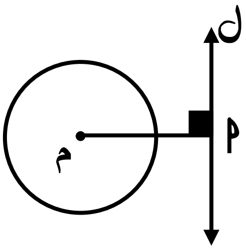
إذا كان ل مستقيم فى مستوى الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{م أ}}$ ⊥ ل فإن أوضاع المستقيم ل هى :

١ خارج الدائرة

م أ > نق

م أ ∈]نق ، ∞[

المستقيم ل ∩ الدائرة م = ∅



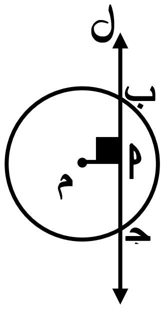
٢ قاطع للدائرة

م أ < نق

م أ ∈ [صفر ، نق[

المستقيم ل ∩ الدائرة م = { ب ، جـ }

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{ب جـ}}$

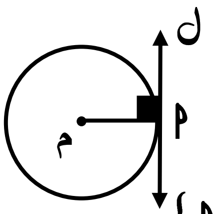


٣ مماس للدائرة

م أ = نق

المستقيم ل ∩ الدائرة م = { أ }

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = { أ }



م دائرة طول نصف قطرها ٤ سم ، ل مستقيم فى مستوى الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{م أ}}$ ⊥ ل ، حدد موضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة إذا كان :

١ م أ = ٢ سم   ل.............. الدائرة

٢ م أ = ٤ سم   ل.............. الدائرة

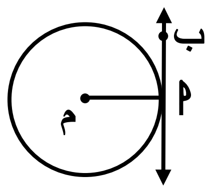
٣ م أ = ٥ سم   ل.............. الدائرة

٤ م أ = صفر سم   ل.............. الدائرة

حقائق هامة

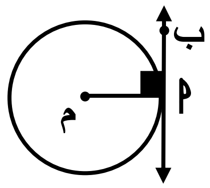
حقيقة ١ : المماس للدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة م
∵ $\overline{\text{مأ}}$ نصف قطر
∴ $\overline{\text{مأ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أب}}$



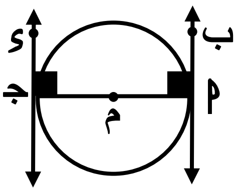
حقيقة ٢ : المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماساً للدائرة

∵ $\overline{\text{مأ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أب}}$
∵ $\overline{\text{مأ}}$ نصف قطر
∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة م



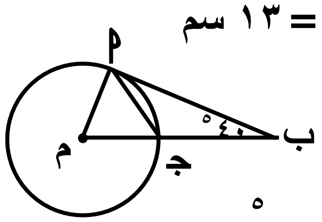
حقيقة ٣ : المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان متوازيان

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مماسان للدائرة م
∵ $\overline{\text{أجـ}}$ قطر فى الدائرة
∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$



(١) فى الشكل المقابل

$\overrightarrow{\text{ب أ}}$ مماس للدائرة م ، ق(∠ب) = ٤٠°
أ ب = ١٢ سم ، ب م = ١٣ سم
أكمل ما يأتى



١ ق(∠م أ ب) = ...°

∵ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ مماس للدائرة م
∵ $\overline{\text{م أ}}$ نصف قطر
∴ $\overline{\text{م أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب أ}}$
∴ ق(∠م أ ب) = ٩٠°

٢ ق(∠م جـ أ) = ...°

فى Δ أ ب م
∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°
∵ ق(∠م أ ب) = ٩٠° ، ق(∠ب) = ٤٠°
∴ ق(∠ب م أ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°

∵ م أ = م جـ = نق
∴ Δ أ م جـ متساوى الساقين
∴ ق(∠م جـ أ) = (١٨٠ − ٥٠) ÷ ٢ = ٦٥°

٣ ب جـ = ...سم

فى Δ أ ب م القائم الزاوية فى أ
(أ م)^{2} = (ب م)^{2} − (أ ب)^{2}
(أ م)^{2} = (١٣)^{2} − (١٢)^{2} = ٢٥
∴ أ م = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

∵ م أ = م جـ = نق
∴ م جـ = ٥ سم

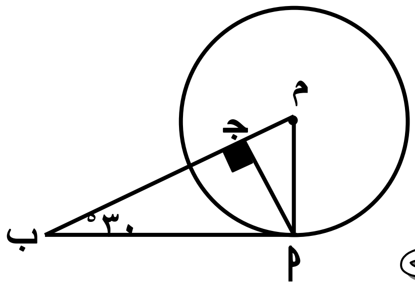
∵ م ب = ١٣ سم
∴ ب جـ = ١٣ − ٥ = ٨ سم

(٢) فى الشكل المقابل

$\overleftarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة م ، ق(∠ب) = ٣٠°

أم = ٨ سم ، $\overline{\text{أجـ}}$ ⊥ $\overline{\text{م ب}}$

أوجد طول كل من $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$



البرهان

فى الدائرة م

∵ $\overleftarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة م عند أ

∵ $\overline{\text{م أ}}$ نصف قطر

∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{أب}}$

∴ ق(∠م أب) = ٩٠°

فى Δ أم ب القائم فى أ

∵ ق(∠ب) = ٣٠°

∴ أم = $\frac{١}{٢}$ ب م

∵ أم = ٨ سم

∴ ب م = ٨ × ٢ = ١٦ سم

فى Δ أب م القائم الزاوية فى أ

(أب)^{٢} = (ب م)^{٢} − (أم)^{٢}

(أب)^{٢} = (١٦)^{٢} − (٨)^{٢} = ١٩٢

∴ أب = $\sqrt{١٩٢}$ = ٨ $\sqrt{٣}$ سم **١٢**

فى Δ أجـب القائم فى جـ

∵ ق(∠ب) = ٣٠°

∴ أجـ = $\frac{١}{٢}$ أب

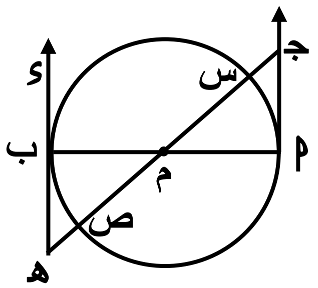
∵ أب = ٨ $\sqrt{٣}$ سم

∴ أجـ = ٨ $\sqrt{٣}$ ÷ ٢ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم **١٢**

(٣) فى الشكل المقابل

$\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماسان للدائرة

اثبت أن جـ س = ص هـ



البرهان

فى الدائرة م

∵ $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ مماس للدائرة م عند أ

∵ $\overline{\text{م أ}}$ نصف قطر

∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ∴ ق(∠م أجـ) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماس للدائرة م عند ب

∵ $\overline{\text{م ب}}$ نصف قطر

∴ $\overline{\text{م ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ∴ ق(∠م ب هـ) = ٩٠°

فى ΔΔ م أجـ ، م ب هـ

فيهما
م أ = م ب = نق
ق(∠م أجـ) = ق(∠م ب هـ) = ٩٠°
ق(∠أ م جـ) = ق(∠ب م هـ) بالتقابل بالرأس

∴ يتطابق ΔΔ و ينتج أن

م جـ = م هـ **١**

م س = م ص = نق **٢**

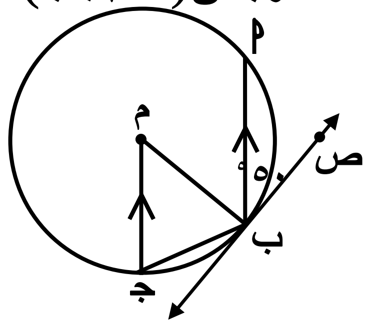
بطرح ٢ من ١

∴ جـ س = ص هـ

(٤) فى الشكل المقابل

ب ص مماس للدائرة م عند ب ، ؟ب // م جـ

، ق(∠ ؟ب ص) = ٥٠ ° أوجد ق(∠ م جـ ب)



البرهان

فى الدائرة م

∵ ب ص مماس للدائرة م عند ب

∵ م ب نصف قطر

∴ م ب ⊥ ب ص

∴ ق(∠ م ب ص) = ٩٠ °

، ∵ ق(∠ ؟ب ص) = ٥٠ °

∴ ق(∠ ؟ب م) = ٩٠ - ٥٠ = ٤٠ °

∵ ؟ب // م جـ

∴ ق(∠ ؟ب م) = ق(∠ م) = ٤٠ °

بالتبادل

∵ م ب = م جـ = نق

∴ Δ م ب جـ متساوى الساقين

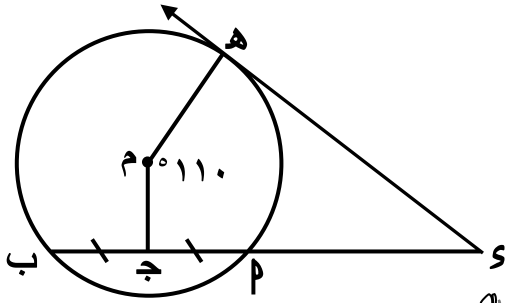
∴ ق(∠ م ب جـ) = ق(∠ م جـ ب) =

(١٨٠ - ٤٠) ÷ ٢ = ٧٠ °

(٥) فى الشكل المقابل

ء هـ مماس للدائرة م عند هـ ، جـ منتصف ؟ب

، ق(∠ م) = ١١٠ ° أوجد ق(∠ ء)



البرهان

فى الدائرة م

∵ ء هـ مماس للدائرة م عند هـ

∵ م هـ نصف قطر

∴ م هـ ⊥ ء هـ

∴ ق(∠ ء هـ م) = ٩٠ °

فى الدائرة م

∵ م جـ يمر بمركز الدائرة

∵ م جـ ينصف ؟ب

∴ م جـ ⊥ ؟ب

∴ ق(∠ ؟جـ م) = ٩٠ °

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠ °

فى الشكل الرباعى هـ م جـ ء

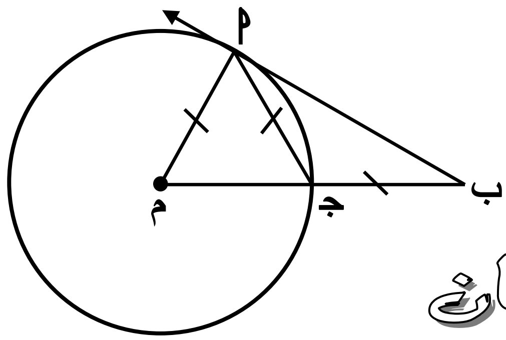
ق(∠ ء) = ٣٦٠ ° - (٩٠ + ٩٠ + ١١٠)

= ٧٠ °

(٦) فى الشكل المقابل

م أ = أ جـ = ب جـ

اثبت أن ب أ مماس للدائرة م عند أ



البرهان

فى الدائرة م

∵ م أ = م جـ = نق

، ∵ م أ = أ جـ معطى

∴ م أ = م جـ = أ جـ

∴ Δ أ جـ م متساوى الأضلاع

∴ ق(∠ أ جـ م) = ق(∠ جـ أ م) = ق(∠ م)

= ٦٠° ١

∵ جـ ∈ ب م ، ∵ ق(∠ أ جـ م) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°

فى Δ أ جـ ب متساوى الساقين

∵ جـ أ = جـ ب

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ب أ جـ) =

(١٨٠ - ١٢٠) ÷ ٢ = ٣٠° ٢

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ ب أ م) = ٦٠° + ٣٠° = ٩٠°

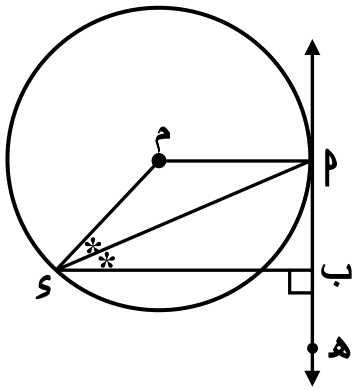
، ∵ م أ نصف قطر

∴ ب أ مماس للدائرة م عند أ

(٧) فى الشكل المقابل

ق(∠ أ ء م) = ق(∠ أ ء ب) ، ء ب ⊥ أ ب

اثبت أن ب أ مماس للدائرة م عند أ



البرهان

فى الدائرة م

∵ م أ = م ء = نق

∴ Δ أ م ء متساوى الساقين

∴ ق(∠ م أ ء) = ق(∠ م ء أ)

، ∵ ق(∠ أ ء م) = ق(∠ أ ء ب) معطى

∴ ق(∠ م أ ء) = ق(∠ أ ء ب)

و هما فى وضع تبادل

∴ أ م // ب ء

∴ ق(∠ م أ ب) = ق(∠ هـ ب ء) = ٩٠°

بالتناظر

، ∵ م أ نصف قطر

∴ ب أ مماس للدائرة م عند أ

تدريبات

س١ أكمل ما يأتى :

(١) المماس للدائرة يكون .... على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس

(٢) المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون .... للدائرة

(٣) المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان ....

س٢ م دائرة طول قطرها ٨ سم ، ؟ نقطة فى مستوى الدائرة ، حدد موضع نقطة ؟ بالنسبة للدائرة إذا كان :

١ م ؟ = ٨ سم ؟ .... الدائرة

٢ م ؟ = ٣ سم ؟ .... الدائرة

٣ م ؟ = ٤ سم ؟ .... الدائرة

٤ م ؟ = صفر سم ؟ .... الدائرة

س٣ م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، ل مستقيم فى مستوى الدائرة م ، م ؟ ⊥ ل ، حدد موضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة إذا كان :

١ م ؟ = ٣ سم ل .... الدائرة

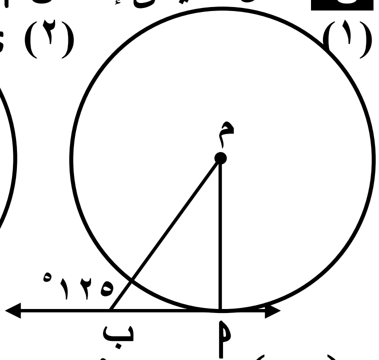
٢ م ؟ = ٤ سم ل .... الدائرة

٣ م ؟ = ٧ سم ل .... الدائرة

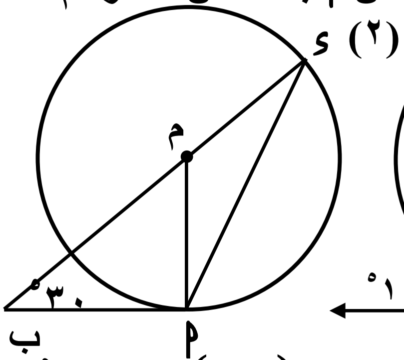
٤ م ؟ = صفر سم ل .... الدائرة

٥ م ؟ = ٧ $\sqrt{٢}$ سم ل .... الدائرة

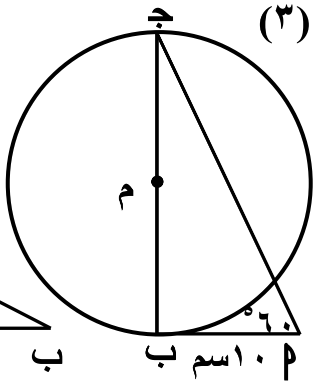
س٤ أكمل ما يأتى إذا كان $\overleftrightarrow{؟ب}$ مماس للدائرة م



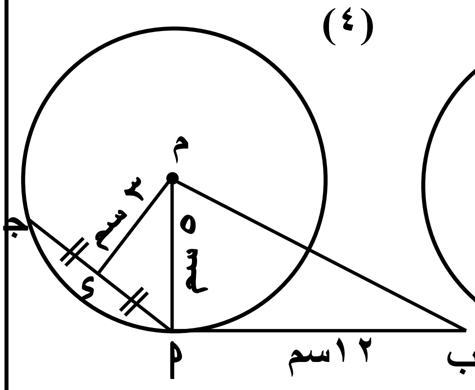
ق(∠م) = ... °



ق(∠ء) = ... °

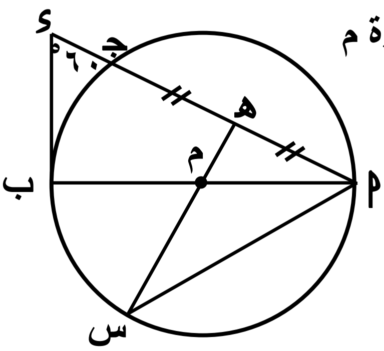


مساحة Δ ؟ب جـ = ... سم٢



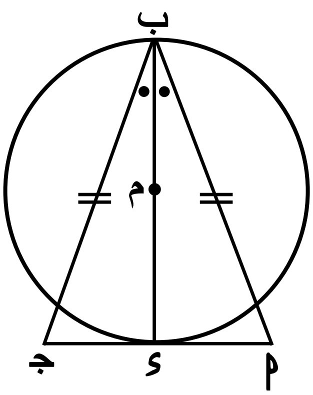
محيط الشكل ؟ ب م ء = ... سم

س٥ $\overline{بء}$ مماس للدائرة م ، ق(∠ء) = ٦٠° أوجد ق(∠م؟س)



س٦ في الشكل المقابل

اثبت أن $\overline{؟جـ}$ مماس للدائرة عند ء



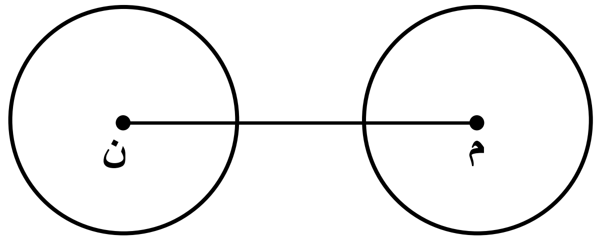
ثالثاً موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى

١ الدائرتان متباعدتان

م ن > نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ∅

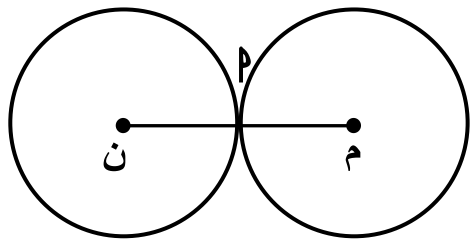


٢ الدائرتان متماستان من الخارج

م ن = نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

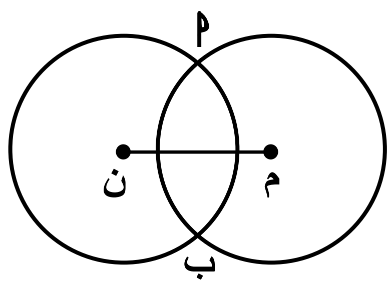
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ }



٣ الدائرتان متقاطعتان

نق١ - نق٢ < م ن < نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

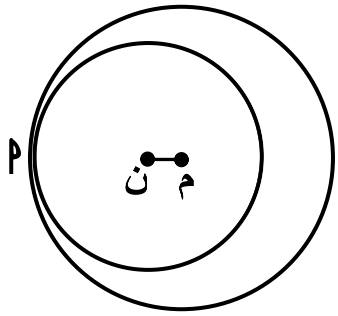


٤ الدائرتان متماستان من الداخل

م ن = نق١ - نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

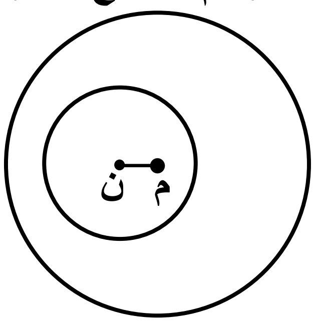


٥ الدائرتان متداخلتان

م ن < نق١ - نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

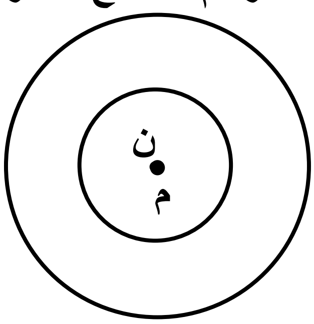


٦ الدائرتان متحدتا المركز

م ن = صفر

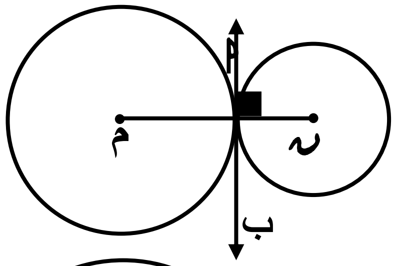
الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

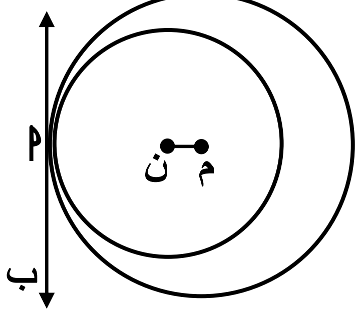
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن



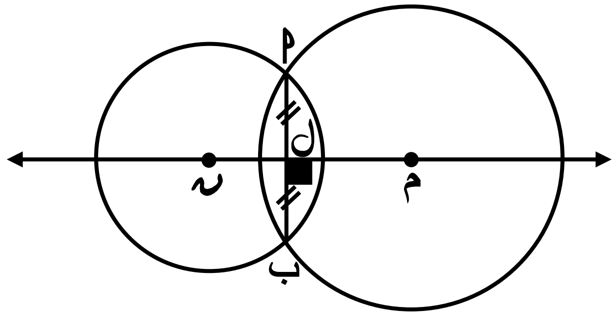
نتائج هامة

نتيجة ١ : خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس و يكون عمودياً على المماس المشترك





نتيجة ٢ : خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك و ينصفه



فى الدائرتين المتقاطعتين م ، ن

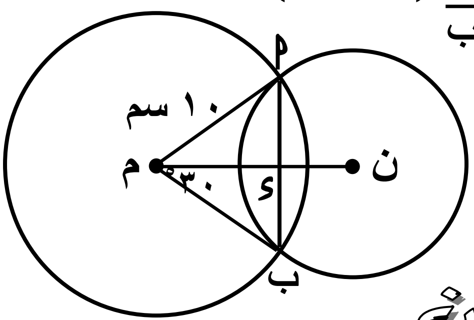
∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط المركزين

∵ $\overline{\text{أب}}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أب}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ينصف $\overline{\text{أب}}$

(١) فى الشكل المقابل
الدائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ،ب
، م أ = ١٠ سم ، ق(∠ب م ى) = ٣٠°
أوجد طول $\overline{\text{أب}}$



البرهان

فى الدائرة م

∵ م أ = م ب = نق = ١٠ سم

فى الدائرتين المتقاطعتين م ، ن

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط المركزين

∵ $\overline{\text{أب}}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أب}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ينصف $\overline{\text{أب}}$

فى Δ ى ب م القائم في ى

∵ ق(∠ب م ى) = ٣٠°

∴ ى ب = $\frac{١}{٢}$ ب م = ١٠ ÷ ٢ = ٥ سم

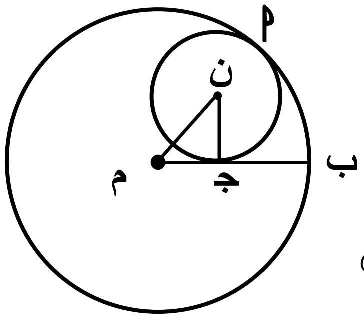
∴ أب = ٥ × ٢ = ١٠ سم

(٢) فى الشكل المقابل

الدائرتان م ، ن متماستان من الداخل فى ﻫ

، م ب مماس للدائرة الصغرى، م جـ = ٣ سم ،

م ن = ٥ سم أوجد طول ب جـ



البرهان

فى الدائرة ن

∵ م ب مماس للدائرة ن عند جـ

∵ ن جـ نصف قطر

∴ ن جـ ⊥ م ب

∴ ق(∠ ن جـ م) = ٩٠°

فى Δ ن جـ م القائم الزاوية فى جـ

(ن جـ)^٢ = (ن م)^٢ − (م جـ)^٢

(ن جـ)^٢ = (٥)^٢ − (٣)^٢ = ١٦

∴ ن جـ = √١٦ = ٤ سم

∴ نق٢ = ٤ سم

∵ الدائرتان م ، ن متماستان من الداخل

∴ م ن = نق١ − نق٢

، ∵ م ن = ٥ سم

∴ نق١ (م ب) = م ن + نق٢

= ٥ + ٤ = ٩ سم

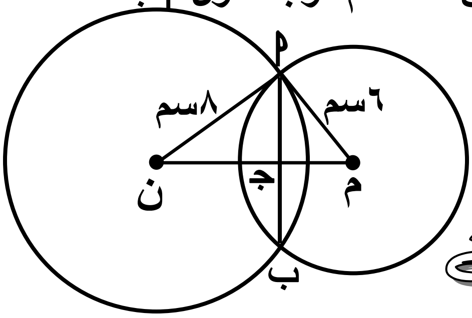
∴ جـ ب = ٩ − ٣ = ٦ سم

(٣) فى الشكل المقابل

الدائرتان م ، ن متقاطعتان فى ﻫ ،ب

م ﻫ مماس للدائرة ن ، ن ﻫ مماس للدائرة م

، م ﻫ = ٦ سم ، ﻫ ن = ٨ سم أوجد طول ﻫ ب



البرهان

فى الدائرة م

∵ ن ﻫ مماس للدائرة م عند ﻫ

∵ م ﻫ نصف قطر

∴ م ﻫ ⊥ ن ﻫ ∴ ق(∠ م ﻫ ن) = ٩٠°

فى Δ م ﻫ ن القائم الزاوية فى ﻫ

(م ن)^٢ = (م ﻫ)^٢ + (ن ﻫ)^٢

(م ن)^٢ = (٦)^٢ + (٨)^٢ = ١٠٠

∴ م ن = √١٠٠ = ١٠ سم

فى الدائرتين المتقاطعتين م ، ن

∵ م ن خط المركزين ∵ ﻫ ب وتر مشترك

∴ م ن ⊥ ﻫ ب ∴ م ن ينصف ﻫ ب

فى Δ م ﻫ ن القائم الزاوية فى ﻫ

∵ ﻫ جـ ⊥ م ن

∴ ﻫ جـ × م ن = ﻫ م × ﻫ ن نتيجة (٢)

إقليدس

∴ ﻫ جـ × ١٠ = ٦ × ٨

∴ ﻫ جـ = ٦ × ٨ ÷ ١٠ = ٤و٨ سم

∵ م ن ينصف ﻫ ب

∴ ﻫ ب = ٤و٨ × ٢ = ٩و٦ سم

تدريبات

س١ أكمل ما يأتى :

(١) خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة .... و يكون .... على المماس المشترك

(٢) خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون .... على الوتر المشترك و ....

س٢ أكمل ما يأتى :

م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٧ سم ، ٣ سم
حدد وضع الدائرتين فى كل حالة مما يأتى :
الفرق =   سم، المجموع =   سم

(١) م ن = ٤ سم   الدائرتان ....

(٢) م ن = ١٠ سم   الدائرتان ....

(٣) م ن = ١٢ سم   الدائرتان ....

(٤) م ن = ٨ سم   الدائرتان ....

(٥) م ن = ٢ سم   الدائرتان ....

(٦) م ن = صفر   الدائرتان ....

(٧) سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = $\emptyset$
الدائرتان ....

(٨) سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = { أ }
الدائرتان ....

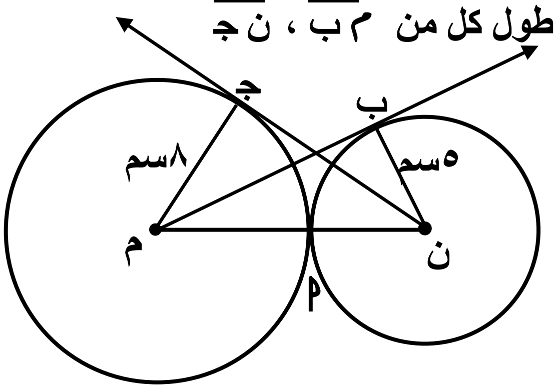
(٩) الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = { أ }
الدائرتان ....

(١٠) الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = $\emptyset$
الدائرتان ....

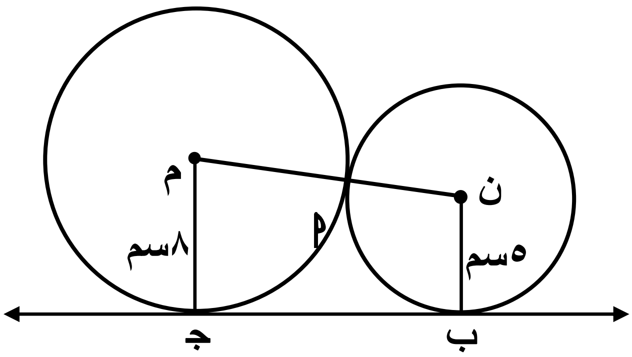
(١١) سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن
= سطح الدائرة ن   الدائرتان ....

(١٢) الدائرة م $\cap$ الدائرة ن = { أ ، ب }
الدائرتان ....

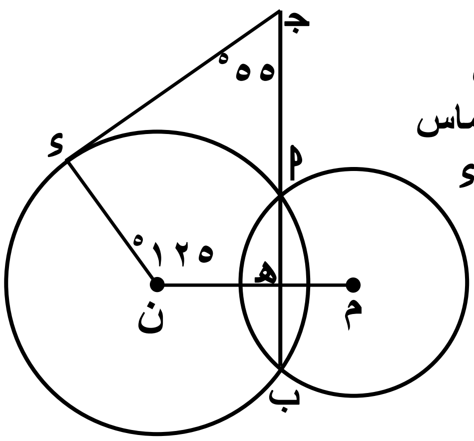
س٣ الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج فى أ
م ب مماس للدائرة ن ، ن جـ مماس للدائرة م
م جـ = ٨ سم ، ب ن = ٥ سم
أوجد طول كل من م ب ، ن جـ



س٤ الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج فى أ
ب جـ مماس مشترك للدائرتين ، م جـ = ٨ سم ، ب ن = ٥ سم أوجد طول ب جـ



س٥ اثبت أن
جـ ء مماس
للدائرة عند ء

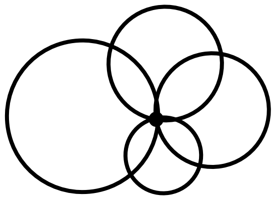


تعيين الدائرة

تتعين الدائرة إذا علم مركزها و طول نصف قطرها

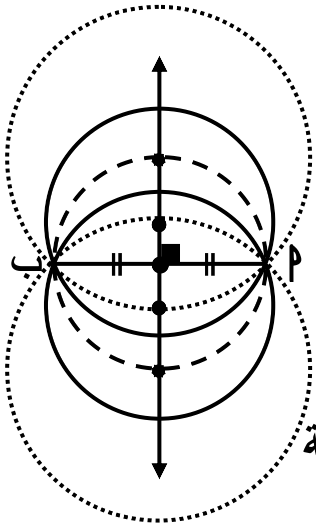
أولاً رسم دائرة تمر بنقطة معلومة

يمكن رسم عدد لانهائى من الدوائر تمر بنقطة معلومة



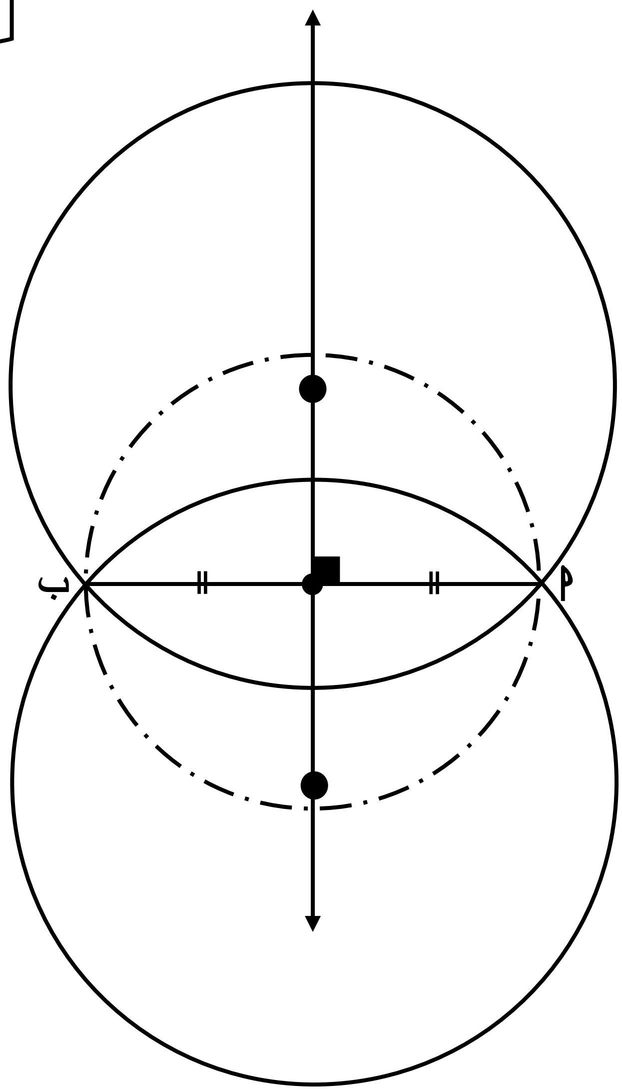
ثانياً رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين

يمكن رسم عدد لانهائى من الدوائر تمر بالنقطتين أ ، ب
مراكزها جميعاً تقع على محور أب



مثال (١)
باستخدام الأدوات الهندسية ارسم أب طولها ٦ سم ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٤ سم (كم عدد الحلول – ثم ارسم أصغر دائرة تمر بالنقطتين)

عدد الحلول = ٢
، أصغر دائرة يمكن رسمها و تمر بطرفى أب يكون طول نصف قطرها = نصف طول أب = ٣سم
و يكون أب قطر فى الدائرة و منتصف أب هو مركز الدائرة



ملاحظات هامة

عدد الدوائر التى طول نصف قطرها نق و تمر بطرفى قطعة مستقيمة أب طولها ١٠سم

إذا كان نق = ٥سم = نصف طول القطعة المستقيمة دائرة واحدة

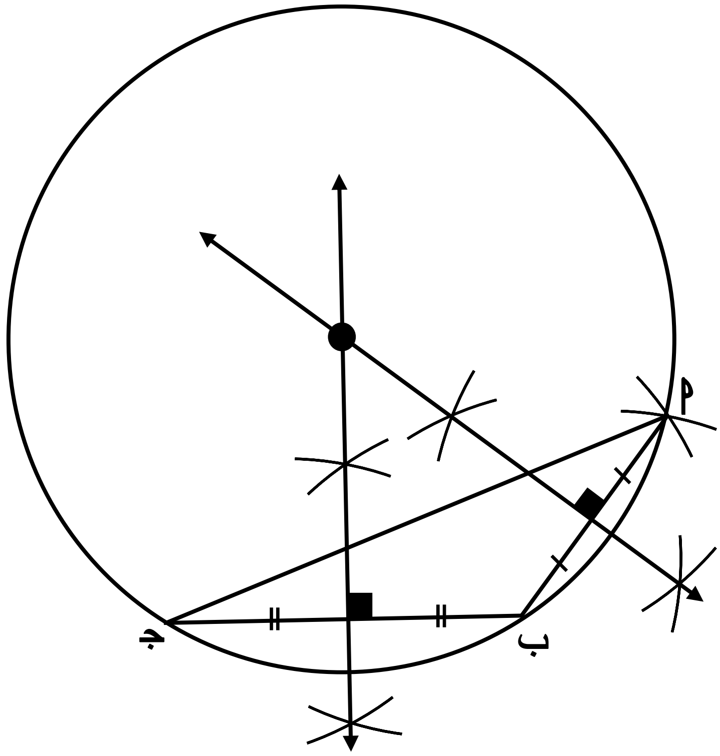
إذا كان نق = ٧سم (أكبر من نصف طول القطعة المستقيمة و محدد) دائرتان

إذا كان نق > ٥سم (أكبر من نصف طول القطعة المستقيمة و غير محدد) عدد لانهائى

ثالثاً رسم دائرة تمر بثلاث نقط معلومة

لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقاط على إستقامة واحدة (عدد الدوائر = صفر)
يمكن رسم دائرة واحدة تمر بثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة

مثال (٢)
باستخدام الأدوات الهندسية ارسم Δ ﻫ ب جـ حيث ب جـ = ٥سم ، ﻫ ب = ٣ سم ، ﻫ جـ = ٧سم ،ثم الدائرة المارة برؤوس المثلث



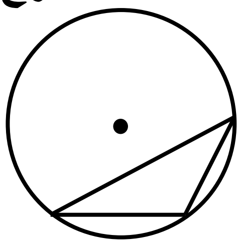
نتائج هامة

نتيجة ١ : الدائرة التى برؤوس المثلث تسمى دائرة خارجة للمثلث

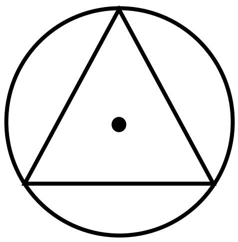
نتيجة ٢ : مركز الدائرة الخارجة للمثلث هى نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاعه من منتصفاتها أو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه

ملاحظات هامة

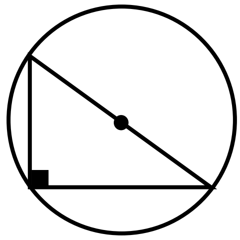
١-مركز الدائرة الخارجة للمثلث المنفرج الزاوية يقع خارج المثلث



٢-مركز الدائرة الخارجة للمثلث الحاد الزوايا يقع داخل المثلث



٣-مركز الدائرة الخارجة للمثلث القائم الزاوية يقع فى منتصف وتر المثلث



تدريبات

س ١ أكمل ما يأتى :

(١) تتعين الدائرة إذا علم .... و ....

(٢) عدد الدوائر التى يمكن رسمها و تمر بنقطة معلومة = ...

(٣) الدوائر التى يمكن رسمها و تمر بطرفى قطعة مستقيمة تقع مراكزها على ....

(٤) عدد الدوائر التى يمكن رسمها و تمر بطرفى قطعة مستقيمة = ...

(٥) عدد الدوائر التى أنصاف أقطارها ٤ سم و يمكن رسمها و تمر بطرفى قطعة مستقيمة طولها ٨ سم = ...

(٦) عدد الدوائر التى أنصاف أقطارها ٣ سم و يمكن رسمها و تمر بطرفى قطعة مستقيمة طولها ٨ سم = ...

(٧) عدد الدوائر التى أنصاف أقطارها ٥ سم و يمكن رسمها و تمر بطرفى قطعة مستقيمة طولها ٨ سم = ...

(٨) عدد الدوائر التى أنصاف أقطارها أكبر من ٤ سم و يمكن رسمها و تمر بطرفى قطعة مستقيمة طولها ٨ سم = ...

(٩) عدد الدوائر التى يمكن رسمها و تمر بثلاث نقط على إستقامة واحدة = ...

(١٠) عدد الدوائر التى يمكن رسمها و تمر بثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة = ...

(١١) الدائرة الخارجة للمثلث هى الدائرة التى تمر بـ......................

(١٢) مركز الدائرة الخارجة للمثلث هى نقطة تقاطع ....
أو نقطة تقاطع ....

(١٣) مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع هى نقطة تقاطع
....
أو ....
أو ....
أو ....
أو ....
أو ....

(١٤) مركز مركز الدائرة الخارجة للمثلث المنفرج الزاوية يقع .... المثلث
و المثلث الحاد الزوايا يقع .... المثلث
و المثلث القائم الزاوية يقع .... المثلث

س ٢ باستخدام الأدوات الهندسية

(١) ارسم $\overline{\text{ا ب}}$ طولها ٨ سم
ثم ارسم الدوائر التى طول نصف قطرها كل منها ٥ سم و تمر بطرفى $\overline{\text{ا ب}}$

(٢) ارسم $\overline{\text{ا ب}}$ طولها ١٠ سم
ثم ارسم أصغر دائرة و تمر بطرفى $\overline{\text{ا ب}}$

(٣) ارسم Δ ا ب جـ متساوى الأضلاع طول ضلعه ٦ سم ثم ارسم الدائرة المارة برؤوس المثلث

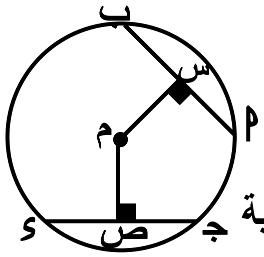
(٤) ارسم Δ ا ب جـ حيث
ب جـ = ٤ سم، ا ب = ٣ سم ، ا جـ = ٥ سم
ثم ارسم الدائرة المارة برؤوس المثلث

علاقة أوتار الدائرة بمركزها

ملاحظة

بعد الوتر عن مركز الدائرة هو طول العمود المرسوم عليه من مركز الدائرة

نظرية (١) الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة



∵ م س ⊥ أ ب

∵ م ص ⊥ جـ ء

∵ أ ب = جـ ء أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية

عكس نظرية (١) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من مركز الدائرة فإنها تكون متساوية فى الطول

∵ م س ⊥ أ ب

∵ م ص ⊥ جـ ء

∵ م س = م ص أبعاد متساوية

∴ أ ب = جـ ء أوتار متساوية

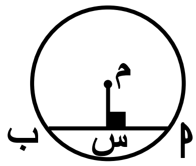
نتيجة فى الدوائر المتطابقة (أنصاف أقطارها متساوية) الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة

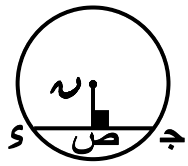
∵ م س ⊥ أ ب

∵ ن ص ⊥ جـ ء

∵ أ ب = جـ ء أوتار متساوية

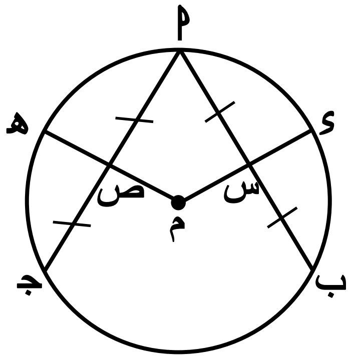
∴ م س = ن ص أبعاد متساوية





(١) فى الشكل المقابل

فى الدائرة م أ ب = أ جـ ، س ، ص منتصفى أ ب ، أ جـ اثبت أن ء س = هـ ص



البرهان

فى الدائرة م

∵ م س يمر بمركز الدائرة

∵ م س ينصف أ ب

∴ م س ⊥ أ ب

∵ م ص يمر بمركز الدائرة

∵ م ص ينصف أ جـ

∴ م ص ⊥ أ جـ

∵ أ ب = أ جـ أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية **١**

∵ م ء = م هـ = نق **٢**

بطرح ١ من ٢

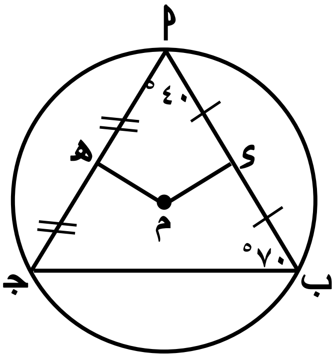
∴ ء س = هـ ص

(٢) فى الشكل المقابل

فى الدائرة م ء ، هـ منتصفى أب ، أجـ

ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠ب) = ٧٠° اثبت أن

م ء = م هـ



البرهان

فى Δ أبجـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ - (٧٠ + ٤٠) = ٧٠°

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ب)

∴ Δ أبجـ متساوى الساقين

∴ أب = أجـ أوتار متساوية **١**

∵ م ء يمر بمركز الدائرة

∵ م ء ينصف أب

∴ م ء ⊥ أب **٢**

∵ م هـ يمر بمركز الدائرة

∵ م هـ ينصف أجـ

∴ م هـ ⊥ أجـ **٣**

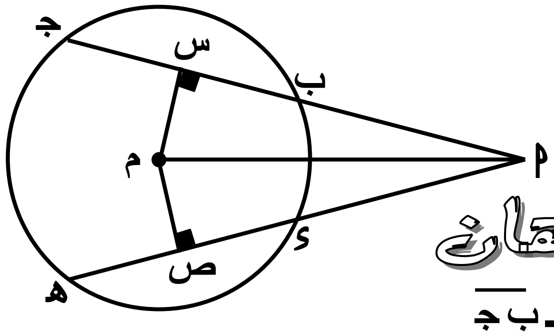
من ١ ، ٢ ، ٣

∴ م ء = م هـ أبعاد متساوية

(٣) فى الشكل المقابل

بجـ = ءهـ ، م س ⊥ ب جـ

م ص ⊥ ءهـ اثبت أن أب = أء



البرهان

∵ م س ⊥ بجـ

∵ م ص ⊥ ءهـ

∵ بجـ = ءهـ أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية

فى ΔΔ أ س م ، أ ص م فيهما

م س = م ص

أم ضلع مشترك

ق(∠أ س م) = ق(∠أ ص م) = ٩٠°

∴ يتطابق ΔΔ و ينتج أن

أ س = أ ص **١**

∵ م س يمر بمركز الدائرة

∵ م س ⊥ بجـ

∴ م س ينصف بجـ

∴ ب س = $\frac{١}{٢}$ بجـ **٢**

∵ م ص يمر بمركز الدائرة

∵ م ص ⊥ ءهـ

∴ م ص ينصف ءهـ

∴ ء ص = $\frac{١}{٢}$ ءهـ **٣**

∵ بجـ = ءهـ (معطى) **٤**

من ٢ ، ٣ ، ٤ ∴ ب س = ء ص **٥**

بطرح ٥ من ١

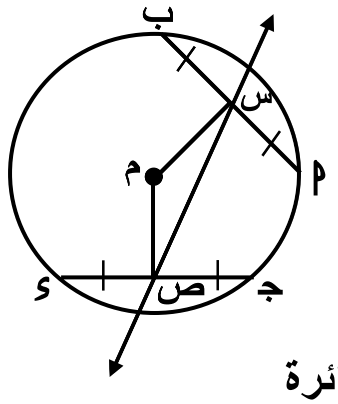
أ س - ب س = أ ص - ء ص

∴ أب = أء

(٤) فى الشكل المقابل

أب = جـ ء ، س، ص منتصفى أب ، جـ ء

اثبت أن ق(∠ أ س ص) = ق(∠ جـ ص س)



البرهان

∵ م س يمر بمركز الدائرة

∵ م س ينصف أب

∴ م س ⊥ أب

∴ ق(∠ م س أ) = ٩٠°

∵ م ص يمر بمركز الدائرة

∵ م ص ينصف جـ ء

∴ م ص ⊥ جـ ء

∴ ق(∠ م ص جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ م س أ) = ق(∠ م ص جـ) = ٩٠°

١

∵ م س ⊥ أب

∵ م ص ⊥ جـ ء

∵ أب = جـ ء أوتار متساوية (معطى)

∴ م س = م ص أبعاد متساوية

∴ Δ م س ص متساوى الساقين

∴ ق(∠ م س ص) = ق(∠ م ص س)

٢

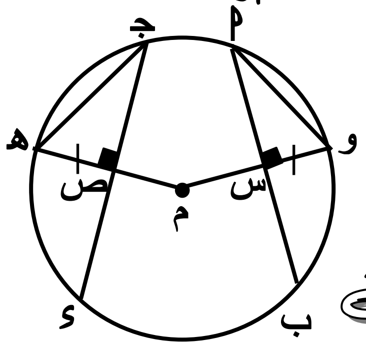
بطرح ٢ من ١

∴ ق(∠ أ س ص) = ق(∠ جـ ص س)

(٥) فى الشكل المقابل

م و ⊥ أب ، م هـ ⊥ جـ ء ، و س = هـ ص

اثبت أن أب = جـ ء ، أو = جـ هـ



البرهان

∵ م و = م هـ = نق

∵ و س = هـ ص (معطى)

بالطرح ∴ م س = م ص

∵ م س ⊥ أب

∵ م ص ⊥ جـ ء

∵ م س = م ص أبعاد متساوية

∴ أب = جـ ء أوتار متساوية م١ ١

∵ م س يمر بمركز الدائرة

∵ م س ⊥ أب

∴ م س ينصف أب

∴ أ س = $\frac{1}{2}$ أب ٢

∵ م ص يمر بمركز الدائرة

∵ م ص ⊥ جـ ء

∴ م ص ينصف جـ ء

∴ جـ ص = $\frac{1}{2}$ جـ ء ٣

من ١ ، ٢ ، ٣ ∴ أ س = جـ ص

فى ΔΔ أ س و ، جـ ص هـ فيهما

أ س = جـ ص

س و = ص هـ

ق(∠ أ س و) = ق(∠ جـ ص هـ) = ٩٠°

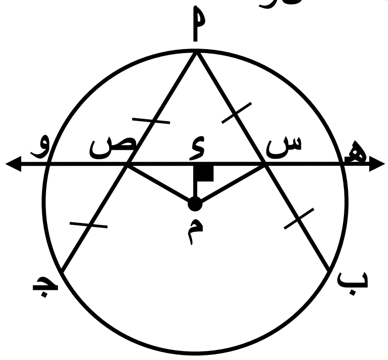
∴ يتطابق ΔΔ و ينتج أن

أو = جـ هـ م٢

(٦) فى الشكل المقابل

أب = أجـ ، س، ص منتصفى أب ، أجـ

م ى ⊥ هـو اثبت أن سهـ = صو



البرهان

∵ م ى يمر بمركزالدائرة

∵ م ى ⊥ هـو

∴ م ى ينصف هـو ∴ ىهـ = ىو (١)

∵ م س يمر بمركزالدائرة

∵ م س ينصف أب

∴ م س ⊥ أب

∵ م ص يمر بمركزالدائرة

∵ م ص ينصف أجـ

∴ م ص ⊥ أجـ

∵ أب = أجـ أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية

∵ Δ م س ص متساوى الساقين

∵ م ى ⊥ س ص

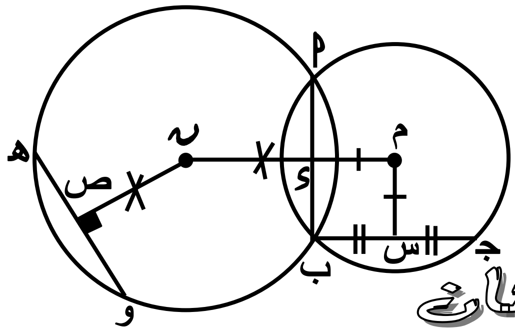
∴ م ى ينصف س ص ∴ ى س = ى ص (٢)

بطرح ٢ من ١ ∴ سهـ = صو

(٧) فى الشكل المقابل

م س = م ى ، ن ى = ن ص ، س منتصف جـب ،

ن ص ⊥ وهـ اثبت أن ب جـ = هـو



البرهان

فى الدائرتين المتقاطعتين م ، ن

∵ م ن خط المركزين

∵ أب وتر مشترك

∴ م ن ⊥ أب

∴ م ن ينصف أب

فى الدائرة م

∵ م س يمر بمركزالدائرة

∵ م س ينصف ب جـ

∴ م س ⊥ ب جـ

∵ م ى ⊥ أب (برهاناً)

∵ م س = م ى أبعاد متساوية (معطى)

∴ ب جـ = أب أوتار متساوية (١)

فى الدائرة ن

∵ ن ى ⊥ أب (برهاناً)

∵ ن ى = ن ص أبعاد متساوية (معطى)

∴ أب = هـو أوتار متساوية (٢)

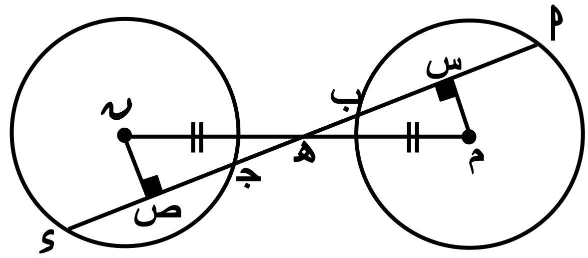
من ١ ، ٢ ∴ ب جـ = هـو

(٨) فى الشكل المقابل

م، ن دائرتان متطابقتان و متباعدتان

، هـ منتصف م ن ، اثبت أن ا ب = جـ ء

، هـ منتصف ا ء



العمل نرسم م س ⊥ ا ب ، ن ص ⊥ جـ ء

البرهان

فى ΔΔ م س هـ ، ن ص هـ فيهما

م هـ = ن هـ

ق(∠ س هـ م) = ق(∠ ن هـ ص) بالتقابل بالرأس

ق(∠ م س هـ) = ق(∠ ن ص هـ) = ٩٠°

∴ يتطابق ΔΔ و ينتج أن

م س = ن ص أبعاد متساوية

∴ ا ب = جـ ء أوتار متساوية لأن الدائرتين متطابقتين **١** **م١**

و ينتج من التطابق أن س هـ = هـ ص **٢**

∵ م س يمر بمركز الدائرة ∵ م س ⊥ ا ب

∴ م س ينصف ا ب ∴ ا س = $\frac{١}{٢}$ ا ب **٣**

∵ ن ص يمر بمركز الدائرة ∵ ن ص ⊥ جـ ء

∴ ن ص ينصف جـ ء ∴ ء ص = $\frac{١}{٢}$ جـ ء **٤**

من ١ ، ٣ ، ٤ ∴ ا س = ء ص **٥**

بجمع ٢ ، ٥

∴ ا س + س هـ = ء ص + هـ ص

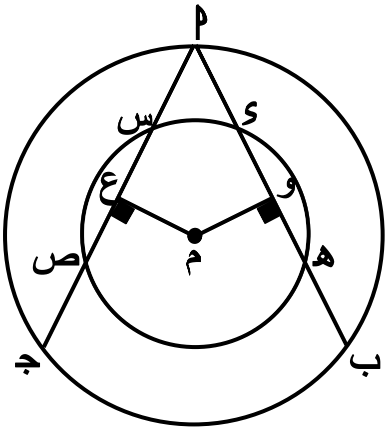
∴ ا هـ = ء هـ ∴ هـ منتصف ا ء **م٢**

(٩) فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ، م و ⊥ ا ب

، م ع ⊥ ا جـ ، ا ب = ا جـ

اثبت أن ء هـ = س ص



البرهان

فى الدائرة الكبرى

∵ م و ⊥ ا ب

∵ م ع ⊥ ا جـ

∵ ا ب = ا جـ أوتار متساوية

∴ م و = م ع أبعاد متساوية

فى الدائرة الصغرى

∵ م و = م ع أبعاد متساوية

∴ ء هـ = س ص أوتار متساوية

تدريبات

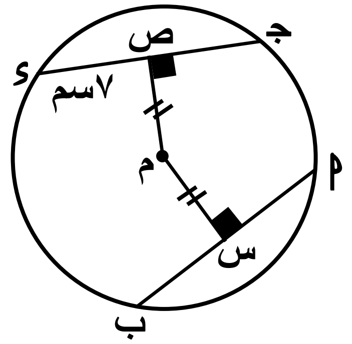
س١ أكمل ما يأتى :

(١) الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد .... من مركز الدائرة

(٢) إذا كانت الأوتارعلى أبعاد متساوية من مركز الدائرة فإنها تكون .... فى الطول

س٢ م س = م ص ، ص ى = ٧ سم

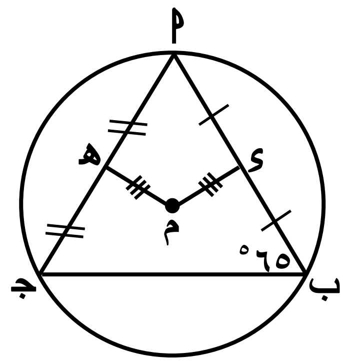
أوجد طول أ س



س٣ م ى = م هـ ، ى، هـ منتصفى أب ، أجـ

ق(∠ب) = ٦٥°

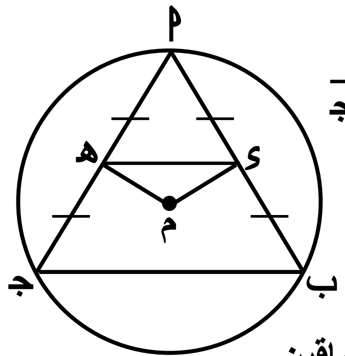
أوجد ق(∠أ)



س٤ أب = أجـ ،

ى، هـ منتصفى أب ، أجـ

ق(∠م ى هـ) = ٣٠°



اثبت أن

(١) Δ م ى هـ متساوى الساقين

(٢) Δ أ ى هـ متساوى الأضلاع

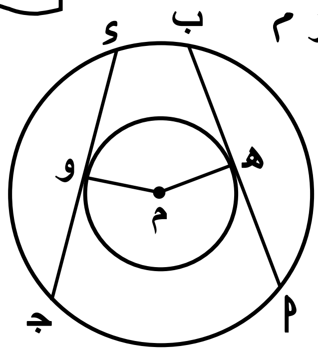
س٥ دائرتان متحدتا المركز م

، أب ، جـ ى

يمسان الدائرة الصغرى

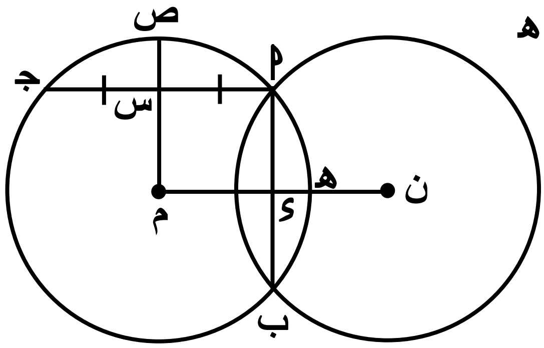
في هـ ، و

اثبت أن أب = جـ ى



س٦ اثبت أن

س ص = ى هـ

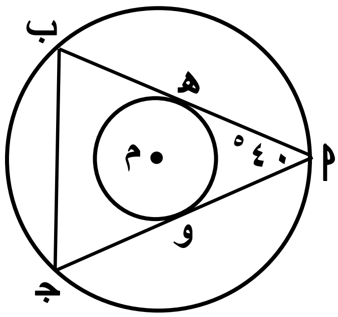


س٧ أب ، أجـ

يمسان الدائرة الصغرى

في هـ ، و

أوجد ق(∠ب)

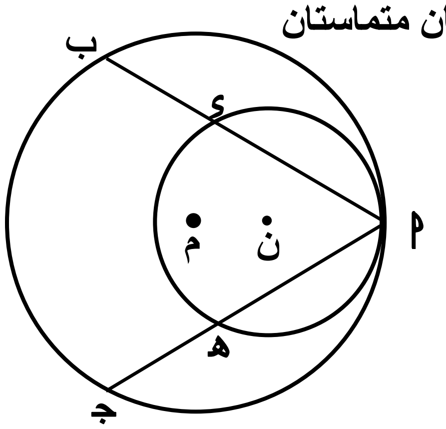


س٨ م ، ن دائرتان متماستان

من الداخل فى أ

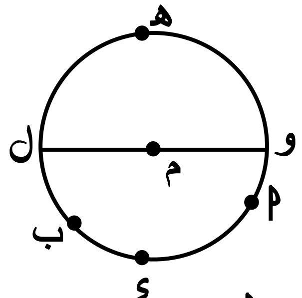
، أب = أجـ

اثبت أن أ ى = أ هـ



الزاوية المركزية و قياس الأقواس

القوس



إذا كانت أ ، ب نقطتان تنتميان للدائرة م فإن مجموعة النقط المحصورة بين أ ، ب تسمى قوساً ويرمز لها بالرمز ⌒أب ونلاحظ أن هناك قوسان يعبرعنهما ⌒أب

(١) ⌒أب (الاصغر) أو ⌒أ ء ب

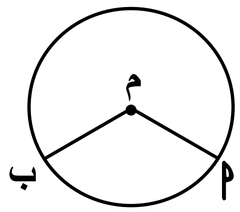
(٢) ⌒أب (الاكبر) أو ⌒أ هـ ب

ملاحظات :-

(١) ⌒أب يعبر عن القوس الأصغر إن لم يذكر غير ذلك

(٢) إذا كان وَلَ قطر فى الدائرة م فإن ⌒و هـ ل = ⌒و ء ل ويسمى كلا منهما نصف دائرة

الزاوية المركزية



هى زاوية رأسها مركز الدائرة ويحتوى كل ضلع من ضلعيها نصف قطر فى الدائرة

ففى الشكل المقابل (∠ أ م ب) رأسها مركز الدائرة وكلا من ضلعيها أنصاف أقطار فى الدائرة م أ ، م ب

ملاحظات هامة

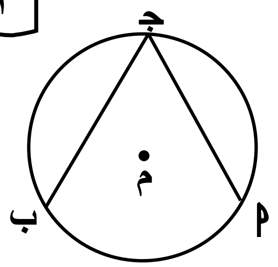
١ــ (∠ أ م ب) المركزية يقابلها ⌒أب (الاصغر)

٢ــ (∠ أ م ب) المركزية المنعكسة يقابلها ⌒أب (الاكبر)

٣ــ ق (∠ أ م ب)+ ق (∠ أ م ب) المنعكسة = ٣٦٠°

٤ــ ق ⌒أب (الاصغر)+ ق ⌒أب (الاكبر) = قياس الدائرة = ٣٦٠°

الزاوية المحيطية



هى زاوية رأسها يقع على الدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها وتراً فى الدائرة

ففى الشكل المقابل الزاوية (∠ أ جـ ب) زاوية محيطية رأسها جـ يقع على الدائرة وكلا من ضلعيها أوتار اً فى الدائرة أجـ وتراً ، بجـ وتراً

(∠ أ جـ ب) المحيطية تقابل ⌒أب (الاصغر)

ملاحظات هامة

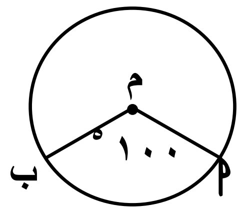
الزاوية المحيطية إذا كانت

١ـ حادة فإنه يقابلها قوس أصغر من نصف الدائرة

٢ ـ قائمة فإنه يقابلها قوس نصف الدائرة

٣ ـ منفرجة فإنه يقابلها قوس أكبر من نصف الدائرة

قياس القوس



هو جزء من قياس الدائرة ويساوى قياس الزاوية المركزية المقابلة له

ق ⌒أب الاصغر = ق (∠ أ م ب) = ١٠٠°

ق ⌒أب الاكبر = ق (∠ أ م ب المنعكسة)

= ٣٦٠ ــ ١٠٠ = ٢٦٠°

ملاحظات هامة

١ــ قياس الدائرة = ٣٦٠°

٢ــ قياس نصف الدائرة = ٣٦٠° ÷ ٢= ١٨٠°

٣ــ قياس $\frac{٢}{٥}$ الدائرة = $\frac{٢}{٥}$ × ٣٦٠° = ١٤٤°

طول القوس

هو جزء من محيط الدائرة (π٢ نق) ويقاس بوحدات الطول (سم ، م ، ...)

و يتم تعيين طول القوس بالعلاقة :-

طول القوس = نسبة القوس× محيط الدائرة

أو طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ ×محيط الدائرة

و يتم تعيين قياس القوس بالعلاقة :-

قياس القوس = نسبة القوس× ٣٦٠°

أو قياس القوس = $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$ × ٣٦٠°

(١)

أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{٢}{٥}$ قياس الدائرة

و إذا كان طول نصف قطر الدائرة ٣٥ سم

أوجد طول القوس ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

قياس القوس = نسبة القوس× ٣٦٠°

= $\frac{٢}{٥}$ × ٣٦٠° = ١٤٤°

طول القوس = نسبة القوس× ٢ π نق

= $\frac{٢}{٥}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣٥ = ٨٨ سم

(٢)

أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٦٣° فى دائرة طول نصف قطرها ٤ سم ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

∵ قياس الزاوية المركزية = ٦٣°

∴ قياس القوس المقابل لها = ٦٣°

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

طول القوس = $\frac{٦٣}{٣٦٠}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤ = ٤و٤ سم

(٣)

أوجد قياس القوس الذى طوله ١١سم فى دائرة

طول نصف قطرها ٧ سم ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

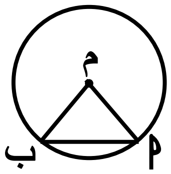
قياس القوس = $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$ × ٣٦٠°

قياس القوس = $\frac{١١}{٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧}$ × ٣٦٠° = ٩٠°

(٤)

فى الدائرة م ﻡ م = ٧سم ، ق (∠ ب) = ٤٥°

أوجد طول $\overset{\frown}{\text{ﻡب}}$



∵ م ﻡ = م ب = نق

∴ Δ ﻡ م ب متساوى الساقين

∴ ق (∠ ﻡ) = ق (∠ ب) = ٤٥°

∴ ق (∠ م) = ١٨٠ - (٤٥ + ٤٥) = ٩٠°

∴ قياس $\overset{\frown}{\text{ﻡب}}$ المقابل لها = ٩٠°

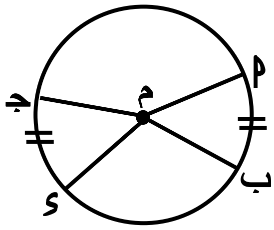
∴ طول $\overset{\frown}{\text{ﻡب}}$ = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

= $\frac{٩٠°}{٣٦٠}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ١١ سم

نتائج هامة

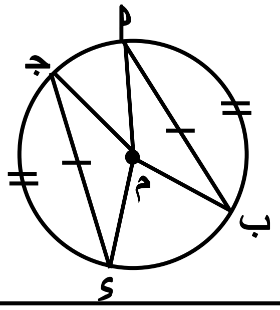
نتيجة ١ : فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس متساوية فى الطول و العكس صحيح

إذا كان ق ⌒أب = ق ⌒جـ ء
فإن طول ⌒أب = طول ⌒جـ ء
و العكس صحيح



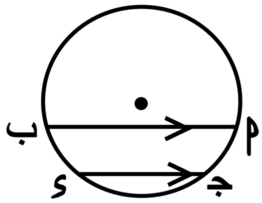
نتيجة ٢ : فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول و العكس صحيح

إذا كان ق ⌒أب = ق ⌒جـ ء
فإن أب = جـ ء
و العكس صحيح



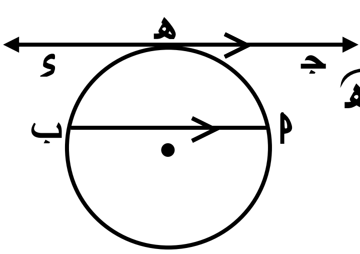
نتيجة ٣ : الوتران المتوازيان فى دائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس

إذا كان أب // جـ ء
فإن ق ⌒أجـ = ق ⌒ب ء

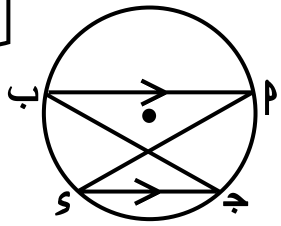


نتيجة ٤ :القوسان المحصوران بين وتر و مماس يوازيه متساويان فى القياس

إذا كان أب // جـ ء
فإن ق ⌒أهـ = ق ⌒بهـ



(١) فى الشكل المقابل
أب // جـ ء
اثبت أن أ ء = ب جـ

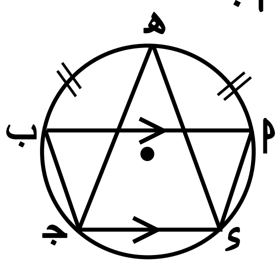


البرهان

∵ أب // جـ ء
∴ ق ⌒أجـ = ق ⌒ب ء
باضافة ق ⌒جـ ء للطرفين
∴ ق ⌒أجـ ء = ق ⌒ب ء جـ
∴ أ ء = ب جـ

---

(٢) فى الشكل المقابل
أب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة
أب // جـ ء ، هـ منتصف ⌒أب
اثبت أن هـ ء = هـ جـ



البرهان

∵ أب // جـ ء
∴ ق ⌒أ ء = ق ⌒ب جـ **١**
∵ هـ منتصف ⌒أب
∴ ق ⌒أهـ = ق ⌒بهـ **٢**
بجمع ١ ، ٢
∴ ق ⌒أ ء + ق ⌒أهـ = ق ⌒ب جـ + ق ⌒بهـ
∴ ق ⌒هـ أ ء = ق ⌒هـ ب جـ
∴ هـ ء = هـ جـ

π = ٣و١٤

(٣) فى الشكل المقابل

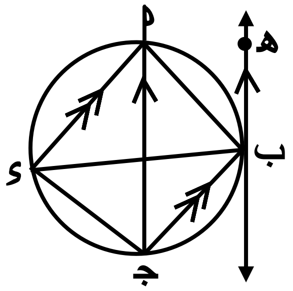
$\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ مماس للدائرة

، $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$

$\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$

اثبت أن Δ ب جـ ء

متساوى الساقين



البرهان

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ ق $\frown$أ ب = ق $\frown$ب جـ   ١

∵ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$

∴ ق $\frown$أ ب = ق $\frown$جـ ء   ٢

من ١ ، ٢

∴ ق $\frown$ب جـ = ق $\frown$جـ ء

∴ ب جـ = جـ ء

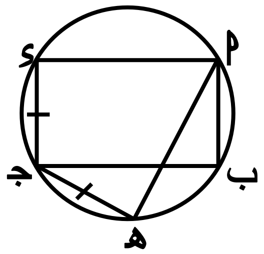
∴ Δ ب جـ ء متساوى الساقين

---

(٤) فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء مستطيل ، جـ ء = جـ هـ

اثبت أن أ هـ = ب جـ



البرهان

∵ أ ب جـ ء مستطيل

∴ أ ب = جـ ء

∵ جـ ء = جـ هـ معطى

∴ أ ب = جـ هـ

∴ ق $\frown$أ ب = ق $\frown$جـ هـ

باضافة ق $\frown$ب هـ للطرفين

∴ ق $\frown$أ ب هـ = ق $\frown$جـ هـ ب

∴ أ هـ = ب جـ

---

(٥) فى الشكل المقابل

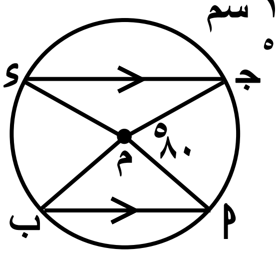
م دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم

، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ ، ق $\frown$أ جـ = ٨٠°

طول $\frown$أ جـ = طول $\frown$أ ب

أوجد ق (∠ أ م ب) ،

ق $\frown$جـ ء ، طول $\frown$جـ ء



البرهان

∵ طول $\frown$أ جـ = طول $\frown$أ ب

∴ ق $\frown$أ جـ = ق $\frown$أ ب

∴ ق $\frown$أ ب = ٨٠°   م١

∴ ق (∠ أ م ب) = ٨٠° المركزية المقابلة للقوس $\frown$أ ب

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

∴ ق $\frown$أ جـ = ق $\frown$ب ء = ٨٠°

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°   م٢

∴ ق $\frown$جـ ء = ٣٦٠ - (٨٠ + ٨٠ + ٨٠) = ١٢٠°

طول $\frown$جـ ء = $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × ٢ × ٣و١٤ × ١٥ = ٣١و٤ سم

م٣

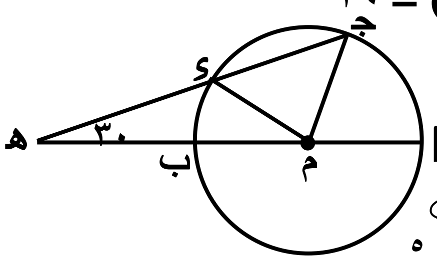
---

(٦) فى الشكل المقابل

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر ، ق(هـ) = ٣٠°

، ق $\frown$أ جـ = ٨٠°

أوجد ق $\frown$جـ ء



البرهان

∵ ق $\frown$أ جـ = ٨٠°

∴ ق (∠ أ م جـ) = ٨٠°

∵ (∠ أ م جـ) خارجة عن Δ جـ م هـ

∴ ق (∠ م جـ هـ) = ٨٠° - ٣٠° = ٥٠°

∵ م جـ = م ء = نق

∴ Δ م جـ ء متساوى الساقين

∴ ق (∠ م جـ ء) = ق (∠ م ء جـ) = ٥٠°

∴ ق (∠ جـ م ء) = ١٨٠ - (٥٠ + ٥٠) = ٨٠°

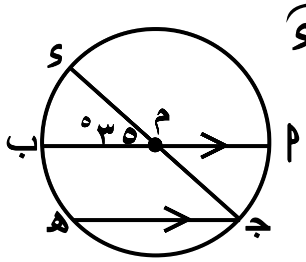
∴ ق $\frown$جـ ء = ٨٠° المقابل لزاوية (∠ جـ م ء) المركزية

(٧) فى الشكل المقابل

$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، قطران فى الدائرة م بحيث

ق (∠ ء م ب) = ٣٥° ، $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـهـ}}$

أوجد ق $\overset{\frown}{\text{جـهـ}}$ ، ق $\overset{\frown}{\text{أء}}$



البرهان

∵ ق (∠أمجـ) = ق (∠ءمب) = ٣٥ °

بالتقابل بالرأس

∴ ق $\overset{\frown}{\text{أجـ}}$ = ٣٥ ° المقابل للزاوية المركزية (∠أمجـ)

∵ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـهـ}}$

∴ ق $\overset{\frown}{\text{أجـ}}$ = ق $\overset{\frown}{\text{بهـ}}$ = ٣٥ °

∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة

∴ ق $\overset{\frown}{\text{أب}}$ = ١٨٠ °

∴ ق $\overset{\frown}{\text{جـهـ}}$ = ١٨٠ - (٣٥ + ٣٥) = ١١٠° **١**

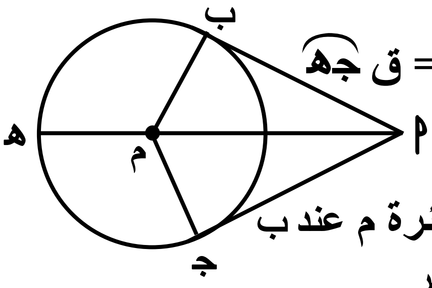
∴ ق $\overset{\frown}{\text{أء}}$ = ١٨٠ - ٣٥ = ١٤٥° **٢**

(٨) فى الشكل المقابل

$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ قطعتان مماستان للدائرة م

عند ب ، جـ

اثبت أن ق $\overset{\frown}{\text{بهـ}}$ = ق $\overset{\frown}{\text{جـهـ}}$



البرهان

∵ $\overline{\text{أب}}$ مماس للدائرة م عند ب

∵ $\overline{\text{مب}}$ نصف قطر

∴ $\overline{\text{مب}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$

∴ ق (∠ أ ب م) = ٩٠ °

∵ $\overline{\text{أجـ}}$ مماس للدائرة م عند جـ

∵ $\overline{\text{مجـ}}$ نصف قطر

∴ $\overline{\text{مجـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$

∴ ق (∠ أ جـ م) = ٩٠ °

فى ΔΔ أب م ، أجـم فيهما

أم ضلع مشترك

م ب = م جـ = نق

ق(∠ أ ب م) = ق (∠ أ جـ م) = ٩٠ °

∴ Δ أ ب م ≡ Δ أ جـ م

∴ ق (∠ أ م ب) = ق (∠ أ م جـ)

∵ م ∈ $\overline{\text{أهـ}}$

∴ ق (∠ ب م هـ) = ق (∠ جـ م هـ) **١**

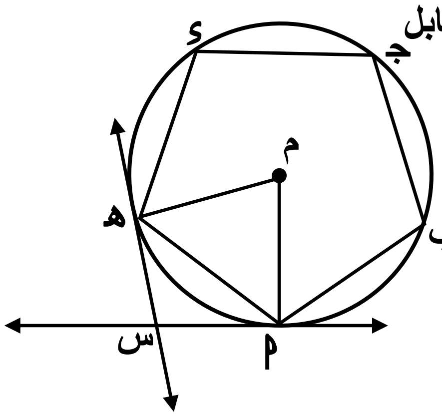
∵ ق $\overset{\frown}{\text{بهـ}}$ = ق (∠ ب م هـ) **٢**

∵ ق $\overset{\frown}{\text{جـهـ}}$ = ق (∠ جـ م هـ) **٣**

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

∴ ق $\overset{\frown}{\text{بهـ}}$ = ق $\overset{\frown}{\text{جـهـ}}$

(١) فى الشكل المقابل



ﺃ ب جـ ء هـ خماسي منتظم مرسوم داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{\text{ﺃس}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{سهـ}}$ مماسان للدائرة

أوجد ق$\overset{\frown}{\text{ﺃهـ}}$ ، ق(∠ ﺃ س هـ)

البرهان

∵ الشكل ﺃ ب جـ ء هـ خماسي منتظم

∴ أضلاعه جميعاً متساوية فى الطول

∴ ﺃب = ب جـ = جـ ء = ء هـ = هـ ﺃ

∴ ق$\overset{\frown}{\text{ﺃب}}$ = ق$\overset{\frown}{\text{بجـ}}$ = ق$\overset{\frown}{\text{جـء}}$ = ق$\overset{\frown}{\text{ءهـ}}$ = ق$\overset{\frown}{\text{هـﺃ}}$

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق$\overset{\frown}{\text{ﺃهـ}}$ = ٣٦٠° ÷ ٥ = ٧٢° **م١**

∵ $\overline{\text{سﺃ}}$ مماس للدائرة م عند ﺃ

∵ $\overline{\text{مﺃ}}$ نصف قطر

∴ $\overline{\text{مﺃ}}$ ⊥ $\overline{\text{سﺃ}}$ ∴ ق(∠ م ﺃ س) = ٩٠°

∵ $\overline{\text{سهـ}}$ مماس للدائرة م عند هـ

∵ $\overline{\text{مهـ}}$ نصف قطر

∴ $\overline{\text{مهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{سهـ}}$ ∴ ق(∠ م هـ س) = ٩٠°

∵ ق(∠ ﺃ م هـ) المركزية = ق$\overset{\frown}{\text{ﺃهـ}}$ المقابل لها

∴ ق(∠ ﺃ م هـ) = ٧٢°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠°

فى الشكل الرباعى م ﺃ س هـ

ق(∠ ﺃ س هـ) = ٣٦٠° - (٩٠+٩٠+٧٢) = ١٠٨° **م٢**

س١ أكمل ما يأتى :

(١) الزاوية المحيطية التى يقابلها قوس أصغر من نصف الدائرة نوعها ....

(٢) الزاوية المحيطية التى يقابلها قوس أكبر من نصف الدائرة نوعها ....

(٣) الزاوية المحيطية التى يقابلها قوس نصف الدائرة نوعها ....

(٤) طول قوس نصف الدائرة = ...

(٥) قياس القوس الذى طوله π نق سم فى دائرة طول نصف قطرها نق سم = ...°

(٦) فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس .... فى الطول و العكس صحيح

(٧) الوتران المتوازيان فى دائرة يحصران قوسين .... فى القياس

(٨) القوسان المحصوران بين وتر و مماس يوازيه .... فى القياس

س٢

(١) أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{٢}{٣}$ قياس الدائرة و إذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٤ سم أوجد طول القوس $\pi = \frac{٢٢}{٧}$

(٢) أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{٥}{٦}$ قياس الدائرة و إذا كان طول نصف قطر الدائرة ٨٤ سم أوجد طول القوس $\pi = \frac{٢٢}{٧}$

(٣) أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٦٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٤٢ سم

$\pi = \frac{٢٢}{٧}$

(٤) أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٣٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٢١ سم

$\pi = \frac{٢٢}{٧}$

(٥) أوجد قياس القوس الذى طوله ٢٢ سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٤ سم

$\pi = \frac{٢٢}{٧}$

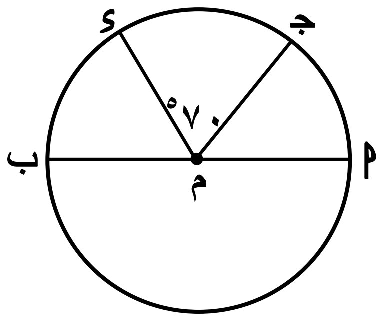
(٦) أوجد قياس القوس الذى طوله ١١ سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٤ سم

$\pi = \frac{٢٢}{٧}$

س٣ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة م

ق(∠ م جـ هـ) = ٨٠° ، ق $\overset{\frown}{\text{أجـ}}$: ق $\overset{\frown}{\text{ءب}}$ = ٥ : ٦

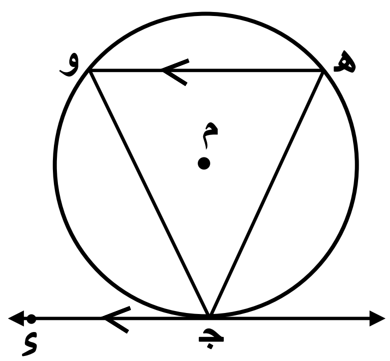
أوجد ق $\overset{\frown}{\text{أجـء}}$



س٤ $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ مماس للدائرة

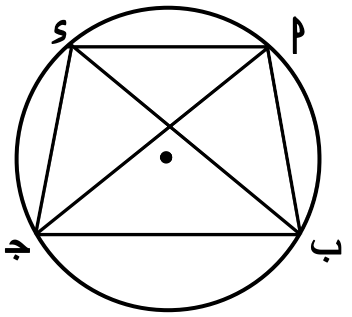
$\overleftrightarrow{\text{هـو}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$

اثبت أن Δ جـهـو متساوى الساقين



س٥ أجـ = ب ء ، أب = (٣س – ٥) سم

، جـ ء = (س + ٣) سم أوجد طول $\overline{\text{أب}}$

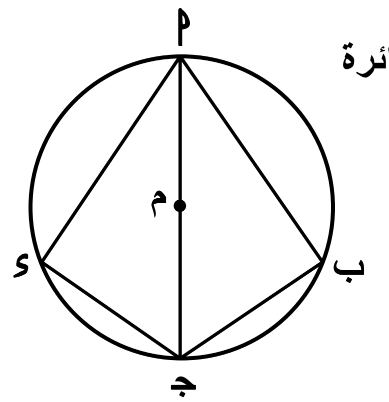


س٦ $\overline{\text{أجـ}}$ قطر فى الدائرة

ب جـ = جـ ء

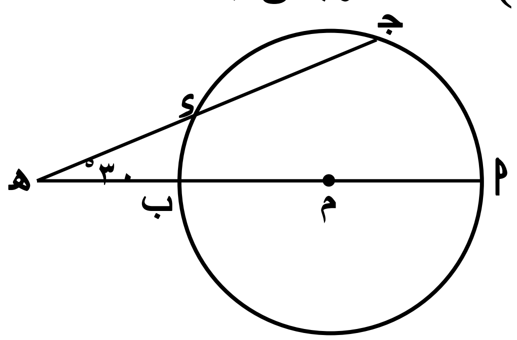
اثبت أن

أ ب = أ ء

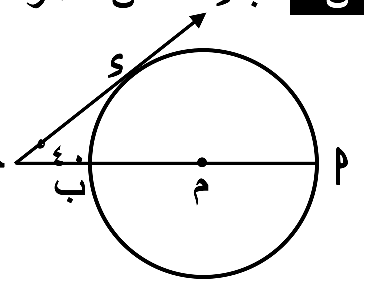


س٧ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة ، ق $\overset{\frown}{\text{أجـ}}$ = ٨٠°

ق(∠هـ) = ٣٠° أوجد ق $\overset{\frown}{\text{جـء}}$

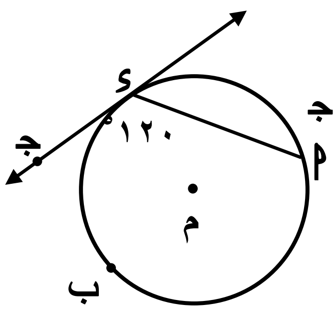


س٨ $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ مماس للدائرة : أكمل ما يأتى



ق $\overset{\frown}{\text{ءب}}$ = ...°

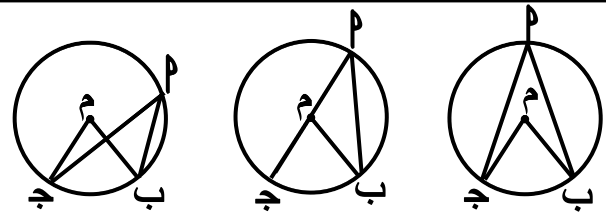
ق $\overset{\frown}{\text{أء}}$ = ...°



ق $\overset{\frown}{\text{أبء}}$ = ...°

العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى القوس

نظرية(١)قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس



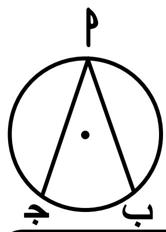
ق(∠أ)المحيطية = ½ ق(∠م)المركزية مشتركتان فى ⌒بج أو

ق(∠م)المركزية = ٢ ق(∠أ)المحيطية مشتركتان فى ⌒بج

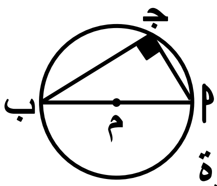
نتائج هامة

نتيجة ١ : قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها

ق(∠أ)المحيطية = ½ ق ⌒بج المقابل لها



نتيجة ٢ : الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة تكون قائمة



∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة

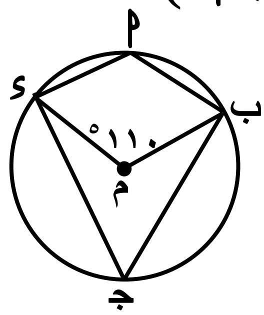
∴ ق(∠ج) = ٩٠° محيطية مرسومة فى نصف دائرة

عكس النتيجة إذا كان ق(∠ج) المحيطية = ٩٠° فإن $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة

(١) فى الشكل المقابل

ق(∠ب م ء)=١١٠° أوجد

ق(∠ب ج ء) ، ق(∠ب أ ء)



البرهان

ق(∠ب ج ء) المحيطية = ½ ق(∠ب م ء)

المركزية مشتركتان فى ⌒ب ء

= ١١٠° ÷ ٢ = ٥٥°

ق(⌒ب أ ء) = ق(∠ب م ء) المركزية

المقابلة له = ١١٠°

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(⌒ب ج ء) = ٣٦٠° - ١١٠° = ٢٥٠°

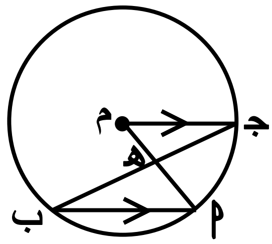
ق(∠أ)المحيطية = ½ ق(⌒ب ج ء) المقابل

لها = ٢٥٠° ÷ ٢ = ١٢٥°

(٢) فى الشكل المقابل

أب // مجـ ، أم ∩ بجـ = {هـ}

اثبت أن بهـ > أهـ



البرهان

∵ أب // مجـ

∴ ق(∠أ) = ق(∠م) بالتبادل ①

∵ ق(∠ب) المحيطية = ½ ق(∠م) المركزية مشتركتان فى أجـ ②

من ١، ٢

∴ ق(∠ب) = ½ ق(∠أ)

فى Δ أبهـ

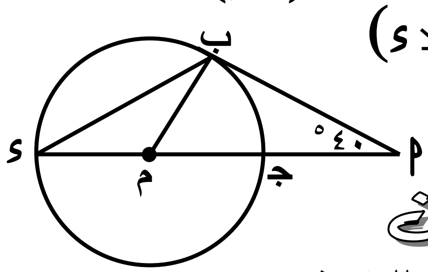
∵ ق(∠أ) > ق(∠ب)

∴ بهـ > أهـ

(٣) فى الشكل المقابل

أب مماس للدائرة ، ق(∠أ) = ٤٠°

اوجد ق(∠ء)



البرهان

∵ أب مماس للدائرة م عند ب

∵ مب نصف قطر

∴ مب ⊥ أب

∴ ق(∠أبم) = ٩٠°

∴ ق(∠أمب) = ١٨٠ - (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°

∴ ق(∠ء) المحيطية = ½ ق(∠بمجـ) المركزية مشتركتان فى بجـ

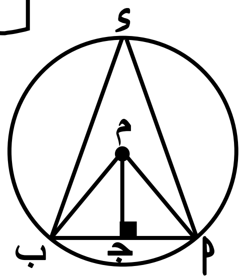
= ٥٠° ÷ ٢ = ٢٥°

(٤) فى الشكل المقابل

أب وتر فى الدائرة

، مجـ ⊥ أب اثبت أن

ق(∠أمجـ) = ق(∠ء)



البرهان

∵ مأ = مب = نق

∴ Δ أمب متساوى الساقين

∵ مجـ ⊥ أب

∴ مجـ ينصف (∠أمب)

∴ ق(∠أمجـ) = ½ ق(∠أمب) ①

∵ ق(∠ء) المحيطية = ½ ق(∠أمب) المركزية مشتركتان فى أب ②

من ١، ٢ ∴ ق(∠أمجـ) = ق(∠ء)

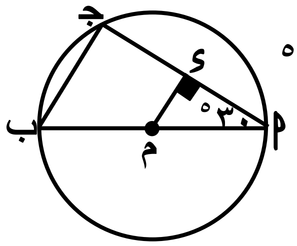
(٥) فى الشكل المقابل

أب قطر فى الدائرة ،

مء ⊥ أجـ ، ق(∠أ) = ٣٠°

اثبت أن مء // بجـ

، بجـ = نق



البرهان

∵ أب قطر فى الدائرة

∴ ق(∠جـ) = ٩٠°

محيطية مرسومة فى نصف دائرة

∴ ق(∠جـ) = ق(∠أءم) = ٩٠°

وهما فى وضع تناظر ∴ مء // بجـ ①

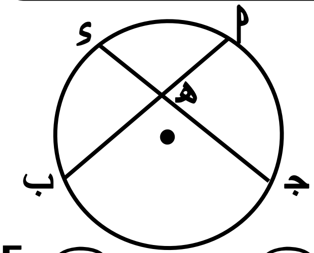
فى Δ أبجـ القائم فى جـ

∵ ق(∠أ) = ٣٠°

∴ بجـ = ½ أب = نق ②

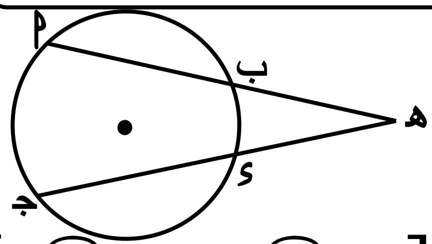
تابع نظرية (١) تمارين مشهورة

تمرين مشهور (١) قياس زاوية تقاطع وترين داخل دائرة



ق(∠ أهـجـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(⌒أجـ) + ق(⌒بء)]

تمرين مشهور (٢) قياس زاوية تقاطع وترين خارج دائرة

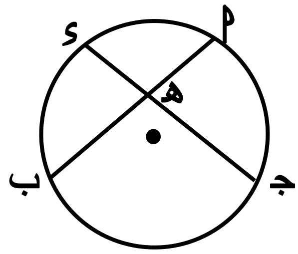


ق(∠ هـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (⌒أجـ) ــ ق (⌒بء)]

(١) فى الشكل المقابل

ق (⌒أجـ) = ٤٠° ، ق (⌒بء) = ٩٠°

أوجد ق(∠ أهـجـ)



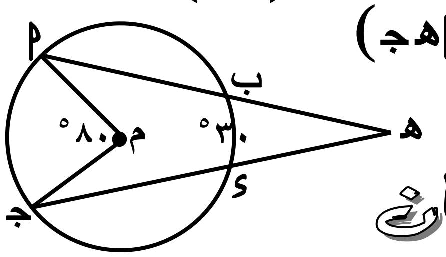
ق(∠ أهـجـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(⌒أجـ) + ق(⌒بء)]

ق(∠ أهـجـ) = $\frac{١}{٢}$ × [٤٠° + ٩٠°] = ٦٥°

(٢) فى الشكل المقابل

ق (⌒بء) = ٣٠° ، ق(∠ م) = ٨٠°

اوجد ق(∠ أهـجـ)



البرهان

ق(⌒أجـ) = ق(∠ أمجـ) المركزية المقابلة له = ٨٠°

ق(∠ هـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (⌒أجـ) ــ ق (⌒بء)]

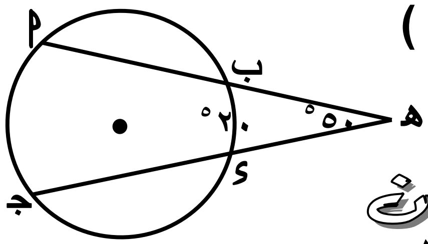
ق(∠ هـ) = $\frac{١}{٢}$ × [٨٠° ــ ٣٠°] = ٢٥°

---

(٣) فى الشكل المقابل

ق (⌒بء) = ٢٠° ، ق(∠ هـ) = ٥٠°

اوجد ق(⌒أجـ)



البرهان

ق(∠ هـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (⌒أجـ) ــ ق (⌒بء)]

٥٠° = $\frac{١}{٢}$ [ق (⌒أجـ) ــ ٢٠°] ×٢

١٠٠° = ق (⌒أجـ) ــ ٢٠°

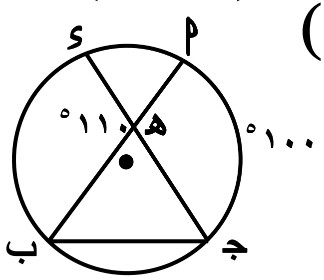
١٠٠° + ٢٠° = ق (⌒أجـ)

ق (⌒أجـ) = ١٢٠°

(٤) فى الشكل المقابل

ق (مج) = ١٠٠°، ق(∠ ءهب) = ١١٠°

أوجد ق(∠ ءجب)



البرهان

ق(∠ب) المحيطية = ½ ق(مج) المقابل لها

= ١٠٠° ÷ ٢ = ٥٠°

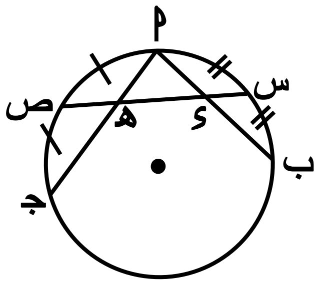
∵ (∠ ءهب) خارجة عن Δ بجه

∴ ق(∠ج) = ١١٠° - ٥٠° = ٦٠°

(٥) فى الشكل المقابل

س منتصف (مب) ، ص منتصف (مج)

اثبت ان مه = مء



البرهان

ق(∠ مءه) = ½ [ق (مص) + ق (سب)]

ق(∠ مهء) = ½ [ق (صج) + ق (مس)]

∵ ق (مص) = ق (صج)

∵ ق (مس) = ق (سب)

∴ ق(∠ مءه) = ق(∠ مهء)

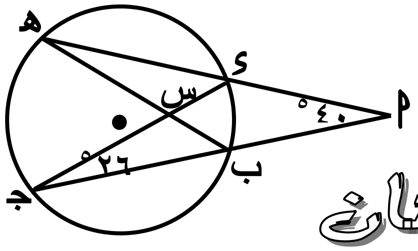
∴ Δ مءه متساوى الساقين

∴ مه = مء

(٦) فى الشكل المقابل

ق(∠م) = ٤٠°، ق(∠ بجء) = ٢٦°

أوجد ق (جه) ، ق(∠ هسج)



البرهان

∵ ق(∠ج) المحيطية = ½ ق(بء) المقابل لها

∴ ق(بء) = ٢٦ × ٢ = ٥٢°

ق(∠م) = ½ [ق(هج) - ق(بء)]

٤٠° = ½ [ق (هج) - ٥٢°]   ×٢

٨٠° = ق (هج) - ٥٢°

٨٠° + ٥٢° = ق (هج)

ق (هج) = ١٣٢°   م١

ق(∠ هسج) = ½ [ق(هج) + ق(بء)]

ق(∠ هسج) = ½ [١٣٢° + ٥٢°]

ق(∠ هسج) = ٩٢°   م٢

تدريبات

س١ أكمل ما يأتى :

(١) قياس الزاوية المحيطية يساوى .... قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

(٢) قياس الزاوية .... يساوى نصف قياس القوس المقابل لها

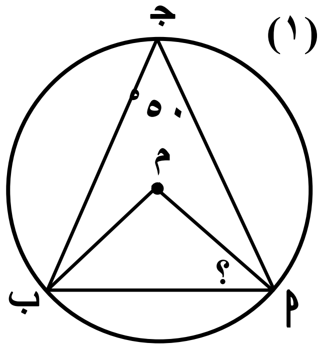
(٣) قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة = ...

(٤) قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى ربع دائرة = ...

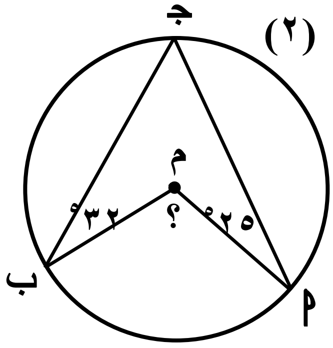
(٥) الزاوية المحيطية المنفرجة تحصر قوساً .... من نصف الدائرة

س٢ أوجد قياسات الزوايا المجهولة فى كل مما يأتى

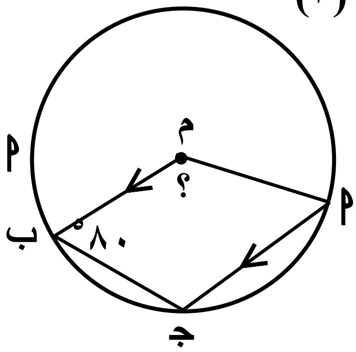
(١)



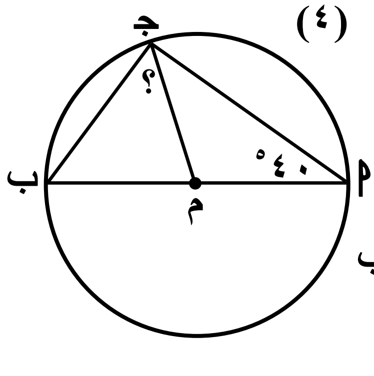
(٢)



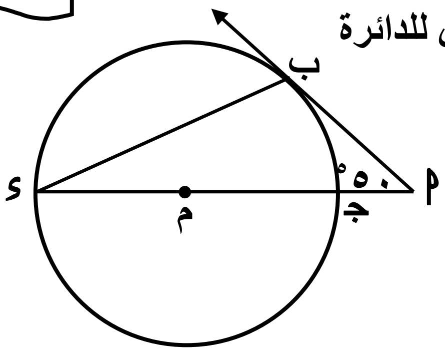
(٣)



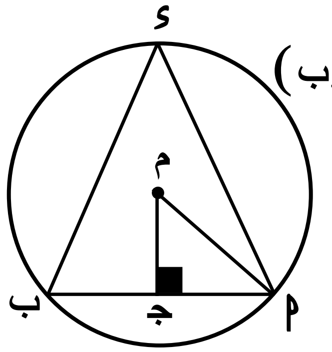
(٤)



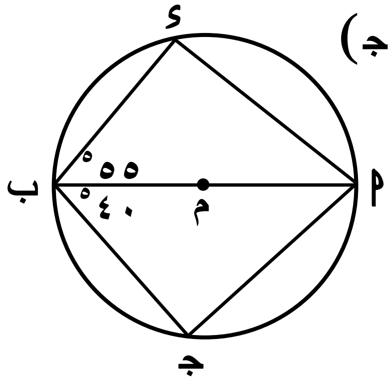
س٣ $\overleftarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة
أوجد ق(∠ ء)



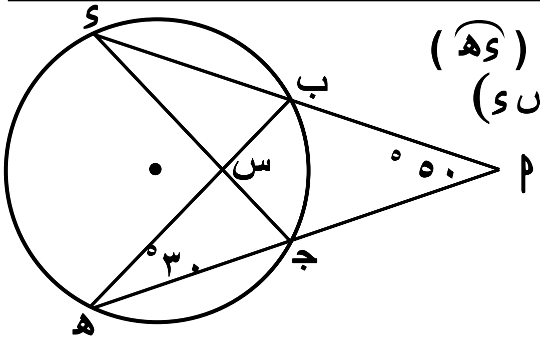
س٤ اثبت أن
ق(∠أمج) = ق(∠أءب)



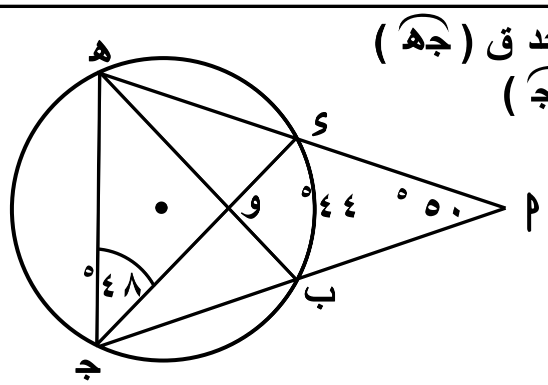
س٥ أوجد ق(∠ءأج)



س٦ أوجد ق (ءه⌒) ، ق(∠هسء)

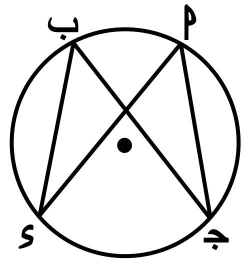


س٧ أوجد ق (جه⌒) ، ق (بج⌒)



الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

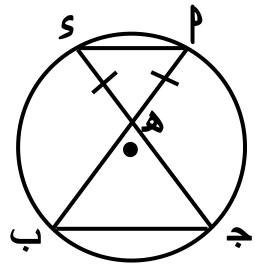
نظرية(٢) الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى الدائرة الواحدة متساوية فى القياس



ق(∠أ) المحيطية = ق(∠ب) المحيطية
مشتركان فى (⌒جـ ء)

(١) فى الشكل المقابل

أهـ = ءهـ اثبت ان هـب = هـجـ



البرهان

فى Δ أهـ ء

∵ أهـ = ءهـ

∴ ق(∠أ) = ق(∠ء) ١

∵ ق(∠أ) المحيطية = ق(∠جـ) المحيطية
مشتركان فى (⌒ب ء) ٢

∵ ق(∠ء) المحيطية = ق(∠ب) المحيطية
مشتركان فى (⌒أجـ) ٣

من ١ ، ٢ ، ٣

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ب)

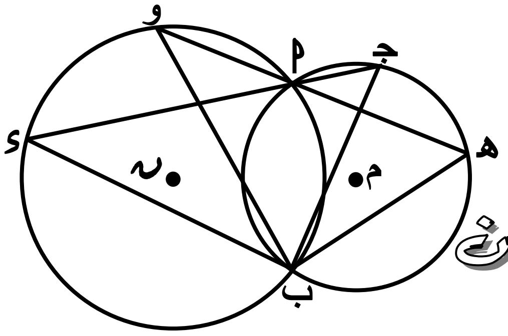
∴ Δ هـجـب متساوى الساقين

∴ هـب = هـجـ

(٢) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتين متقاطعتين فى أ ، ب

اثبت أن ق(∠هـبجـ) = ق(∠ءب و)



البرهان

فى الدائرة م

∵ ق(∠جـأهـ) المحيطية = ق(∠جـب هـ)
المحيطية مشتركان فى (⌒جـهـ) ١

فى الدائرة ن

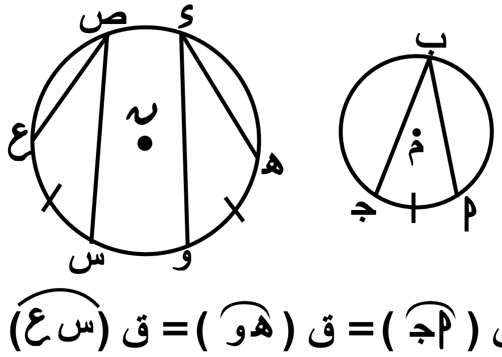
∵ ق(∠و أ ء) المحيطية = ق(∠و ب ء)
المحيطية مشتركان فى (⌒و ء) ٢

∵ ق(∠جـأهـ) = ق(∠و أ ء) بالتقابل بالرأس ٣

من ١ ، ٢ ، ٣

∴ ق(∠هـبجـ) = ق(∠ءب و)

نتيجة : الزوايا المحيطية التى تحصر أقواساً متساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة أو فى عدة دوائر تكون متساوية فى القياس والعكس صحيح



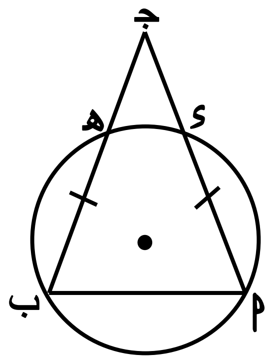
إذا كان ق(⌒أجـ) = ق(⌒هـو) = ق(⌒س ع)

فإن ق(∠ب) = ق(∠ء) = ق(∠ص)

(٣) فى الشكل المقابل

م ء = ب هـ

اثبت ان جـ ء = جـ هـ



البرهان

∵ م ء = ب هـ

∴ ق (م ء⌒) = ق (ب هـ⌒)

باضافة ق ء هـ⌒ للطرفين

∴ ق (م ء هـ⌒) = ق (ب هـ ء⌒)

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ م)

∴ Δ م ب جـ متساوى الساقين

∴ جـ م = جـ ب ، ∵ م ء = ب هـ معطى

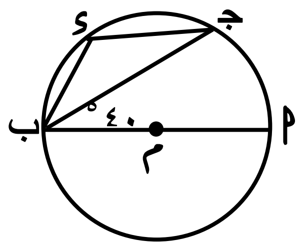
بالطرح ينتج أن جـ ء = جـ هـ

(٤) فى الشكل المقابل

م ب قطر فى الدائرة

، ق (∠ م ب جـ) = ٤٠°

أوجد ق (∠ جـ ء ب)



البرهان

∵ ق (∠ م ب جـ) = ٤٠°

∴ ق (م جـ⌒) = ٤٠° × ٢ = ٨٠°

∵ م ب قطر فى الدائرة

∴ ق (م ب⌒) = ١٨٠°

∴ ق (جـ م ب⌒) = ٨٠° + ١٨٠° = ٢٦٠°

∵ ق (∠ جـ ء ب) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق (جـ م ب⌒) المقابل لها

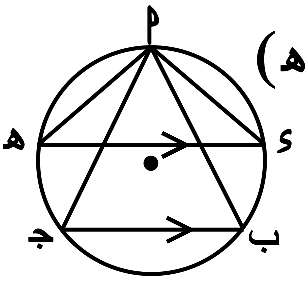
∴ ق (∠ جـ ء ب) = ٢٦٠° ÷ ٢ = ١٣٠°

(٥) فى الشكل المقابل

م ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، ء هـ // ب جـ

اثبت أن

ق (∠ ء م جـ) = ق (∠ ب م هـ)



البرهان

∵ ء هـ // ب جـ

∴ ق (ء ب⌒) = ق (هـ جـ⌒)

بإضافة ق ب جـ⌒ للطرفين

∴ ق (ء ب جـ⌒) = ق (هـ جـ ب⌒)

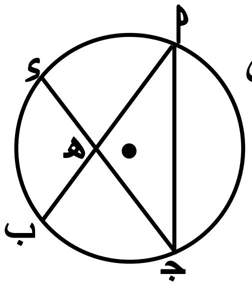
∴ ق (∠ ء م جـ) = ق (∠ ب م هـ)

(٦) فى الشكل المقابل

م ب ، جـ ء وتران متساويان

اثبت أن Δ م هـ جـ

متساوى الساقين



البرهان

∵ م ب = جـ ء

∴ ق (م ء ب⌒) = ق (جـ ب ء⌒)

بطرح ق (ء ب⌒) من الطرفين

∴ ق (م ء⌒) = ق (جـ ب⌒)

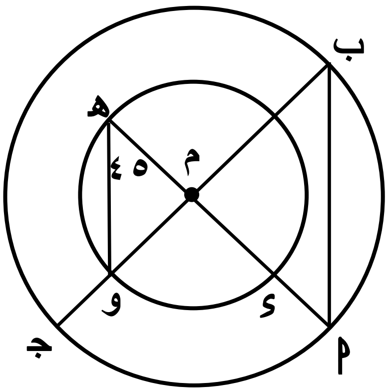
∴ ق (∠ جـ) = ق (∠ م)

∴ م هـ = هـ جـ

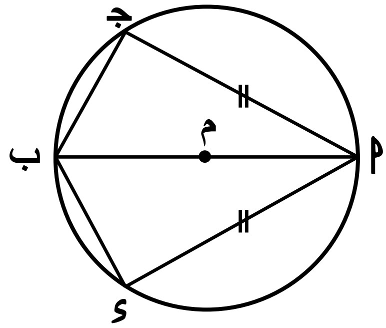
∴ Δ م هـ جـ متساوى الساقين

تدريبات

س١ أوجد ق(∠ ء م و)، ق(∠ أ)

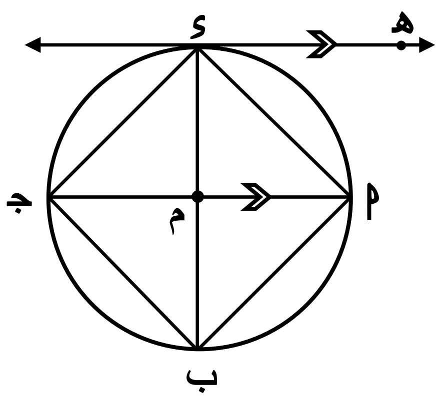


س٢ اثبت أن
ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ ب ء)

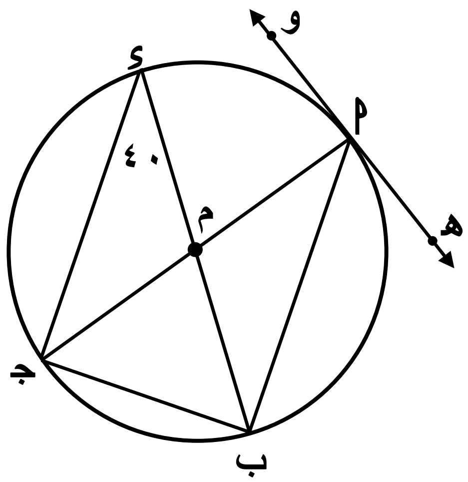


س٣ الشكل أ ب جـ ء مربع ، $\overleftrightarrow{\text{هـ ء}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$

اثبت أن $\overleftrightarrow{\text{هـ ء}}$ مماس للدائرة

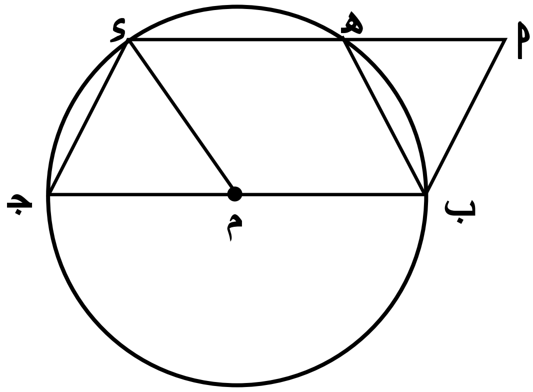


س٤ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ مماس للدائرة اثبت أن
(١) $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$
(٢) ق(∠ هـ أ ب) = ق(∠ أ جـ ب)

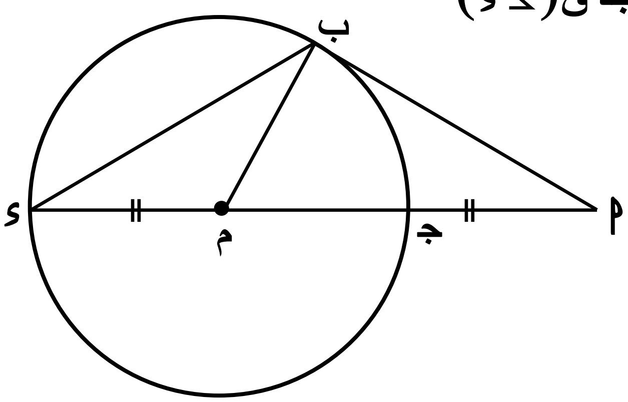


س٥ الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع اثبت أن
(١) ق(∠ ب هـ ء) = ق(∠ هـ ء جـ)

(٢) ق(∠ أ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م ء)



س٦ $\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة ، أ جـ = م ء
أوجد ق(∠ ء)

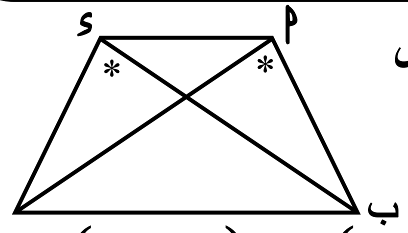


الشكل الرباعى الدائرى

الشكل الرباعى الدائرى هو شكل رباعى تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة

عكس نظرية(٢) إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها فإنه يمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وتراً فيها

فى الشكل المقابل



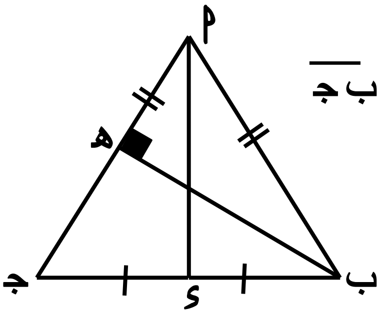
إذا كان ق(∠ب م جـ) = ق(∠ب ء جـ) المرسومتان على القاعدة ب‌جـ وفى جهة واحدة منها فإن النقط م ، ب ، جـ ، ء تقع على محيط دائرة واحدة وفى هذه الحالة يسمى الشكل الرباعى م ب جـ ء (رباعى دائرى)

---

(١) فى الشكل المقابل

م‌ب = م‌جـ ، ء منتصف ب‌جـ ، ب‌هـ ⊥ م‌جـ

اثبت أن النقط م ، ب ، ء ، هـ تمر بها دائرة واحدة



البرهان

فى ∆ م‌ب‌جـ متساوى الساقين

∵ م‌ب = م‌جـ ∵ م‌ء ينصف ب‌جـ

∴ م‌ء ⊥ ب‌جـ ∴ ق(∠ م‌ء‌ب)= ٩٠°

∵ب‌هـ ⊥ م‌جـ ∴ ق(∠ م‌هـ‌ب)= ٩٠°

∴ ق(∠ م‌ء‌ب)= ق(∠ م‌هـ‌ب)

و هما مرسومتان على م‌ب و فى جهة واحدة منها

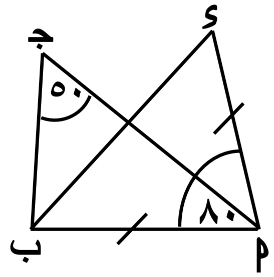
∴ النقط م ، ب ، ء ،هـ تمر بها دائرة واحدة

∴ الشكل م ب ء هـ رباعى دائرى

(٢) فى الشكل المقابل

م‌ب= م‌ء، ق(∠ م)= ٨٠°، ق(∠جـ)= ٥٠°

اثبت أن النقط م ، ب ، جـ ،ء تمر بها دائرة واحدة



البرهان

فى ∆ م‌ب‌ء متساوى الساقين

∵ م‌ب = م‌ء

∴ ق(∠ م‌ء‌ب)= ق(∠ م‌ب‌ء)

∵، مجموع قياسات زوايا ∆الداخلة = ١٨٠°

∴ق(∠ ء)= (١٨٠ - ٨٠)÷٢ = ٥٠°

،∵ق(∠جـ)= ٥٠°

∴ ق(∠ ء)= ق(∠جـ)

و هما مرسومتان على م‌ب و فى جهة واحدة منها

∴ م ، ب ، جـ ،ء تمر بها دائرة واحدة

∴ م ب‌جـ‌ء رباعى دائرى

(٣) فى الشكل المقابل

أجـ قطر فى الدائرة م

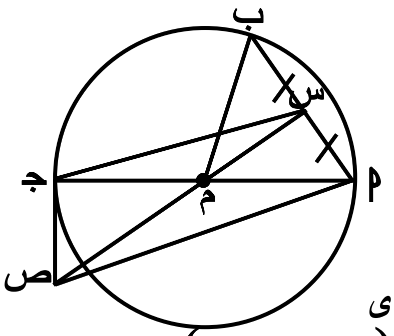
، جـص مماس

، س منتصف أب

اثبت أن

أ سجـص رباعى دائرى

،ق(∠ب م جـ)=٢ ق(∠ س ص جـ)



البرهان

∵ م س يمر بمركز الدائرة

∵ م س ينصف أب

∴ م س ⊥ أب

∴ق(∠أ س ص)=٩٠° **١**

∵ جـص مماس للدائرة م عند جـ

∵ م جـ نصف قطر

∴ م جـ ⊥ جـص

∴ق(∠أ جـص) = ٩٠° **٢**

من ١ ، ٢

∴ق(∠أ س ص)= ق(∠ أ جـ ص)

و هما مرسومتان على أص و فى جهة واحدة منها

∴ أ سجـص رباعى دائرى **م١**

∵ أ سجـص رباعى دائرى

∴ق(∠ س أ جـ) = ق(∠ س ص جـ) **٣**

لأنهما مرسومتان على سجـ و فى جهة واحدة منها

∵ق(∠ب م جـ)المركزية=٢ق(∠ب أ جـ) **٤**

المحيطية مشتركتان فى ب⌒جـ

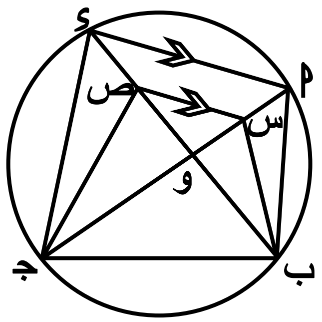
من ٣ ، ٤

∴ق(∠ب م جـ)=٢ ق(∠ س ص جـ) **م٢**

(٤) فى الشكل المقابل

أ بجـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

س ص // أ ء اثبت أن س بجـص رباعى دائرى



البرهان

∵ أ بجـ ء شكل رباعى تمر بروؤسه دائرة

∴ أ بجـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ جـ ب) **١**

لأنهما مرسومتان على أب و فى جهة واحدة منها

∵ س ص // أ ء

∴ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ س ص ب) بالتناظر **٢**

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ س ص ب) = ق(∠ س جـ ب)

و هما مرسومتان على س ب و فى جهة واحدة منها

∴ س ب جـ ص رباعى دائرى

(٥) فى الشكل المقابل

ﻡ ب جـ ى شكل رباعى

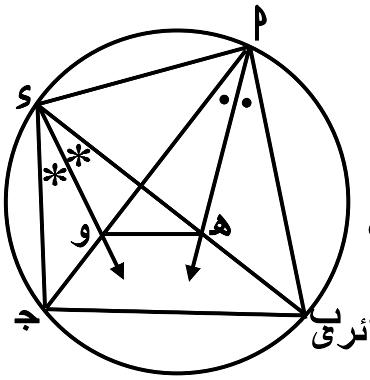
مرسوم داخل دائرة

$\overleftarrow{\text{ﻡ هـ}}$ ينصف (∠ب ﻡ جـ)،

$\overleftarrow{\text{ى و}}$ ينصف (∠ب ى جـ)

اثبت أن ﻡ هـ و ى رباعى دائرى

، $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$



البرهان

∵ ق(∠ب ﻡ جـ) المحيطية = ق(∠ب ى جـ) المحيطية

مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

∵ $\overleftarrow{\text{ﻡ هـ}}$ ينصف (∠ب ﻡ جـ)،

∵ $\overleftarrow{\text{ى و}}$ ينصف (∠ب ى جـ)

∴ $\frac{1}{2}$ ق(∠ب ﻡ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب ى جـ)

∴ ق(∠هـ ﻡ و) = ق(∠هـ ى و)

و هما مرسومتان على $\overline{\text{هـ و}}$

و فى جهة واحدة منها

∴ ﻡ هـ و ى رباعى دائرى م.هـ

∵ ﻡ هـ و ى رباعى دائرى

∴ ق(∠ى ﻡ و) = ق(∠ى هـ و) ١

لأنهما مرسومتان على $\overline{\text{ى و}}$

و فى جهة واحدة منها

∵ ق(∠ى ﻡ جـ) المحيطية = ق(∠ى ب جـ) المحيطية

مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{ى جـ}}$ ٢

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ى هـ و) = ق(∠ى ب جـ)

وهما فى وضع تناظر

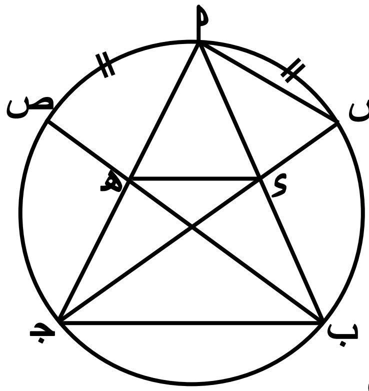
∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ م.هـ

(٦) فى الشكل المقابل

ق($\overset{\frown}{\text{ﻡ س}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ﻡ ص}}$)

اثبت أن ب جـ هـ ى رباعى دائرى ،

ق(∠ى هـ ب) = ق(∠س ﻡ ب)



البرهان

∵ ق($\overset{\frown}{\text{ﻡ س}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ﻡ ص}}$)

∴ ق(∠ﻡ جـ س) المحيطية = ق(∠ﻡ ب ص) المحيطية

∴ ق(∠هـ جـ ى) = ق(∠ى ب هـ)

و هما مرسومتان على $\overline{\text{ى هـ}}$ و فى جهة واحدة منها

∴ ب جـ هـ ى رباعى دائرى م.هـ

∵ ب جـ هـ ى رباعى دائرى

∴ ق(∠ى هـ ب) = ق(∠ى جـ ب) ١

لأنهما مرسومتان على $\overline{\text{ى ب}}$ و فى جهة واحدة منها

∵ ق(∠س ﻡ ب) المحيطية

= ق(∠س جـ ب) المحيطية مشتركتان ٢

فى $\overset{\frown}{\text{س ب}}$

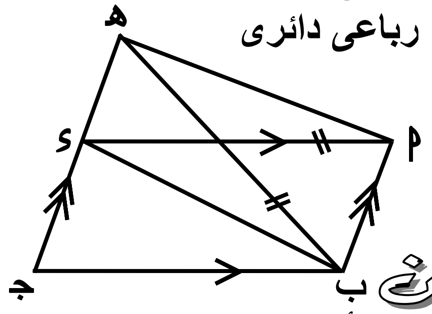
من ١ ، ٢

∴ ق(∠ى هـ ب) = ق(∠س ﻡ ب) م.هـ

(٧) فى الشكل المقابل

م ب جـ ء متوازى أضلاع ، هـ ب = م ء

اثبت أن م ب ء هـ رباعى دائرى



البرهان

∵ م ب جـ ء متوازى أضلاع

∴ ب جـ = م ء ، ∵ هـ ب = م ء معطى

∴ ب جـ = هـ ب

∴ Δ ب جـ هـ متساوى الساقين

∴ ق(∠ جـ) = ق(∠ ب هـ جـ) **١**

∵ م ب جـ ء متوازى أضلاع

∴ ق(∠ جـ) = ق(∠ ب م ء) **٢**

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ ب م ء) = ق(∠ ب هـ ء)

و هما مرسومتان على ب ء و فى جهة واحدة منها ∴ م ب ء هـ رباعى دائرى

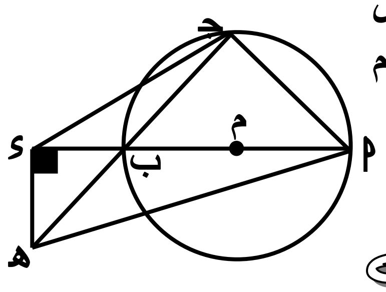
---

(٨) فى الشكل المقابل

م ب قطر فى الدائرة م

ء هـ ⊥ م ء ،

اثبت أن م جـ ء هـ رباعى دائرى



البرهان

∵ م ب قطر فى الدائرة

∴ ق (∠ م جـ ب) = ٩٠°

محيطية مرسومة فى نصف دائرة

∵ م ء ⊥ ء هـ ∴ ق (∠ م ء هـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ م جـ هـ) = ق(∠ م ء هـ)

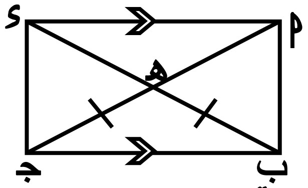
و هما مرسومتان على م هـ و فى جهة واحدة منها

∴ م جـ ء هـ رباعى دائرى

(٩) فى الشكل المقابل

م ء // ب جـ ، هـ ب = هـ جـ

اثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى



البرهان

∵ م ء // ب جـ

∴ ق(∠ م ء ب) = ق(∠ ء ب جـ) بالتبادل **١**

∵ Δ ب جـ هـ متساوى الساقين

∴ ق(∠ هـ ب جـ) = ق(∠ هـ جـ ب) **٢**

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ م ء ب) = ق(∠ م جـ ب)

و هما مرسومتان على م ب و فى جهة واحدة منها

∴ م ب جـ ء رباعى دائرى

ملاحظات

(١) المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين أشكال رباعية دائرية

(٢) متوازى الاضلاع والمعين وشبه المنحرف الغير متساوى الساقين رباعية غير دائرية

(١٠) فى الشكل المقابل

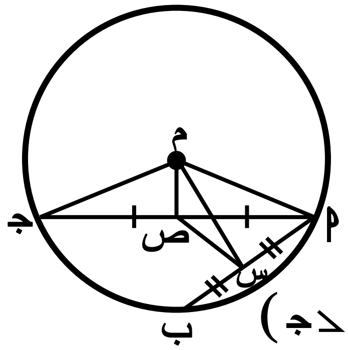
س ، ص منتصفى $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$

اثبت أن

أ س ص م رباعى دائرى

، ق(∠ م س ص) = ق(∠ جـ)

$\overline{أم}$ قطر فى الدائرة المارة بالنقط أ، س ، ص ، م



البرهان

∵ $\overline{مص}$ يمر بمركز الدائرة ∵ $\overline{مص}$ ينصف $\overline{أجـ}$

∴ $\overline{مص}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ ∴ ق(∠ م ص أ) = ٩٠°

∵ $\overline{م س}$ يمر بمركز الدائرة ∵ $\overline{م س}$ ينصف $\overline{أب}$

∴ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ ق(∠ م س أ) = ٩٠°

∴ ق(∠ م ص أ) = ق(∠ م س أ)

و هما مرسومتان على $\overline{أم}$ و فى جهة واحدة منها

∴ أ س ص م رباعى دائرى م.هـ

∵ أ س ص م رباعى دائرى

∴ ق(∠ م س ص) = ق(∠ م أ ص) **١**

لأنهما مرسومتان على $\overline{ص م}$ و فى جهة واحدة منها

∵ م أ = م جـ = نق

∴ Δ م أ جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠ م جـ ص) = ق(∠ م أ ص) **٢**

من ١ ، ٢

ق(∠ م س ص) = ق(∠ م جـ ص) م.هـ

∵ ق(∠ م ص أ) = ٩٠° برهاناً

محيطية مرسومة فى نصف دائرة

∴ $\overline{أم}$ قطر فى الدائرة المارة بالنقط

أ، س ، ص ، م م.هـ

(١١) فى الشكل المقابل

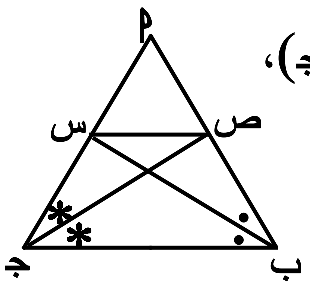
أب = أجـ ،

$\overrightarrow{ب س}$ ينصف (∠ ص ب جـ)،

$\overrightarrow{جـ ص}$ ينصف (∠ أ جـ ب)

اثبت أن ب جـ س ص رباعى دائرى

، $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$



البرهان

∵ أب = أجـ

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ جـ ب)

∵ $\overrightarrow{ب س}$ ينصف (∠ ص ب جـ)

∵ $\overrightarrow{جـ ص}$ ينصف (∠ أ جـ ب)

∴ $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ جـ ب)

ق(∠ ص ب س) = ق(∠ ص جـ س)

و هما مرسومتان على $\overline{ص س}$ و فى جهة واحدة منها

∴ ب جـ س ص رباعى دائرى م.هـ

∵ ب جـ س ص رباعى دائرى

∴ ق(∠ ص س ب) = ق(∠ ص جـ ب) **١**

لأنهما مرسومتان على $\overline{ص ب}$ و فى جهة واحدة منها

∵ ق(∠ س ب جـ) = ق(∠ ص جـ ب) برهاناً **٢**

من ١ ، ٢

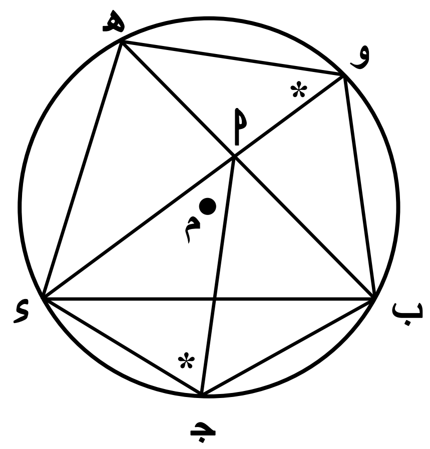
∴ ق(∠ ص س ب) = ق(∠ س ب جـ)

و هما فى وضع تبادل

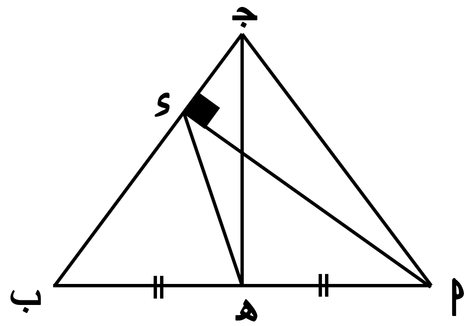
∴ $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ م.هـ

تدريبات

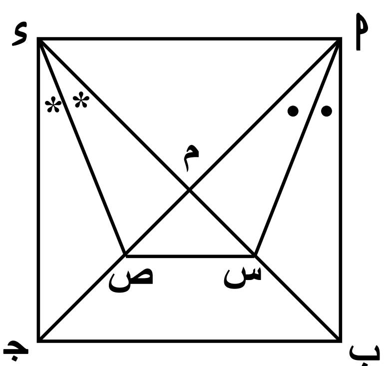
س١ ق(∠هـ و ء) = ق(∠ أ ج ء)
اثبت أن الشكل أ ب ج ء رباعى دائرى



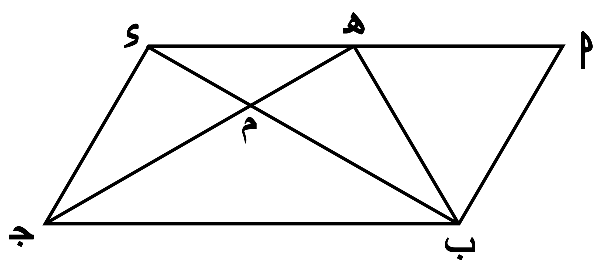
س٢ ج أ = جب ، هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب ج}}$
اثبت أن الشكل أ هـ ء ج رباعى دائرى



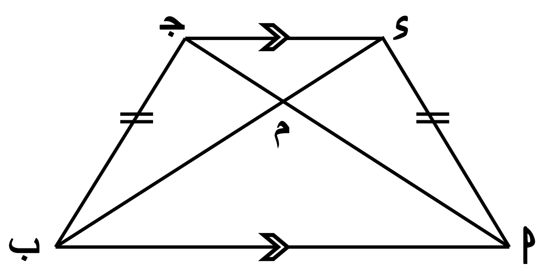
س٣ الشكل أ ب ج ء مربع ،
أ س ينصف ∠ب أ ج ، $\overrightarrow{\text{ء ص}}$ ينصف ∠ب ء ج
(١) **اثبت أن الشكل** أ ب ء هـ رباعى دائرى
(٢) **أوجد** ق(∠ أ ص س)



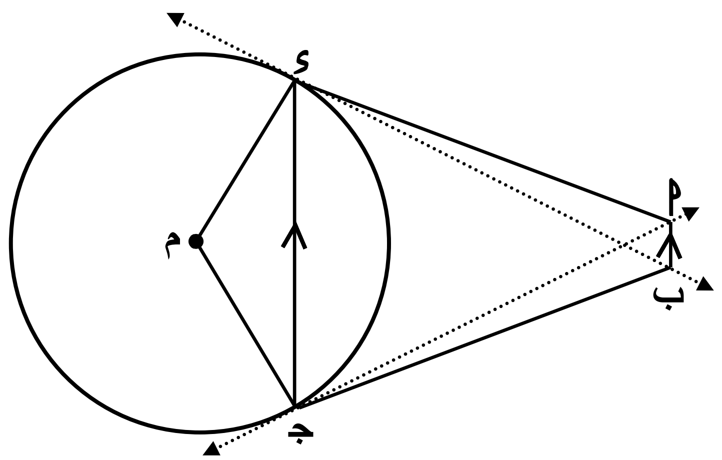
س٤ الشكل أ ب ج ء متوازى أضلاع ،
Δ أ ب هـ متساوى الأضلاع
اثبت أن الشكل ب هـ ء ج رباعى دائرى



س٥ الشكل أ ب ج ء شبه منحرف متساوى الساقين
اثبت أن الشكل أ ب ج ء رباعى دائرى

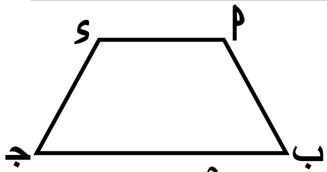


س٦ $\overleftrightarrow{\text{أ ج}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماسان للدائرة م ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ج ء}}$
اثبت أن الشكل أ ب ج ء رباعى دائرى



خواص الشكل الرباعى الدائرى

نظرية(٣) إذا كان الشكل الرباعى دائرياً فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتان (مجموع قياسيهما = ١٨٠ °)

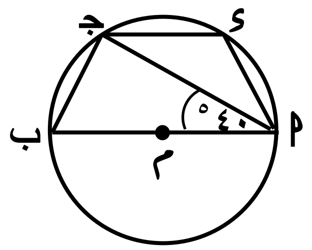


إذا كان الشكل م ب ج ء رباعياً دائرياً فإن

ق(∠ م) + ق(∠ج) = ١٨٠°

ق(∠ب) + ق(∠ ء) = ١٨٠°

(١) فى الشكل المقابل $\overline{\text{مب}}$ قطر فى الدائرة ، ق(∠جمب)= ٤٠° أوجد ق(∠ ء)



البرهان

∵ $\overline{\text{مب}}$ قطر فى الدائرة

∴ ق(∠ مجب)= ٩٠° محيطية مرسومة فى نصف دائرة

فى Δ مبج

∵ مجموع قياسات زوايا Δالداخلة = ١٨٠°

∴ق(∠ب)= ١٨٠ -(٩٠ + ٤٠)= ٥٠°

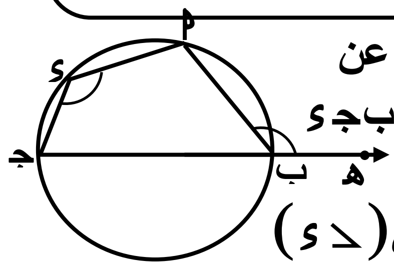
∵ م ب ج ء شكل رباعى تمر بروؤسه دائرة

∴ م ب ج ء رباعى دائرى

∴ق(∠ب) + ق(∠ ء) = ١٨٠°

∴ق(∠ ء) = ١٨٠° - ٥٠° = ١٣٠°

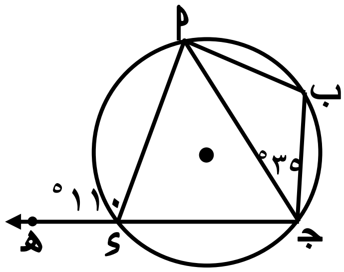
نتيجة قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعى الدائرى يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها



∵(∠ م ب هـ) خارجة عن الرباعى الدائرى م ب ج ء

∴ ق(∠ م ب هـ)= ق(∠ ء)

(٢) فى الشكل المقابل م ب ج ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ق(∠ م ء هـ)= ١١٠° ، ق(∠ب ج م)= ٣٥° اثبت أن Δ م ب ج متساوى الساقين



البرهان

∵ م ب ج ء شكل رباعى تمر بروؤسه دائرة

∴ م ب ج ء رباعى دائرى

∵(∠ م ء هـ) خارجة عن الرباعى الدائرى م ب ج ء

∴ ق(∠ م ء هـ)= ق(∠ب) = ١١٠°

فى Δ م ب ج

∵ مجموع قياسات زوايا Δ الداخلة = ١٨٠°

∵ ق(∠ب ج م)= ٣٥°

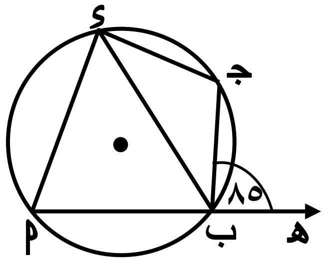
∴ ق(∠ب م ج)= ١٨٠ -(١١٠ + ٣٥)= ٣٥°

فى Δ م ب ج

∵ ق(∠ب م ج)= ق(∠ب ج م)

∵ Δ م ب ج متساوى الساقين

(٣) فى الشكل المقابل
ق(⌒أب) = ١١٠°
، ق(∠جـبهـ)=٨٥°
أوجد ق(∠ب ءجـ)

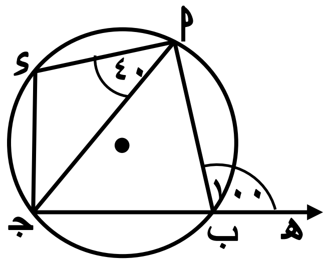


البرهان

∵ ق(⌒أب) = ١١٠°
ق(∠أءب) المحيطية
= ½ ق(⌒أب) المقابل لها
= ١١٠° ÷ ٢ = ٥٥°
∵ أ بجـء شكل رباعى تمر بروؤسه دائرة
∴ أ بجـء رباعى دائرى
∵ (∠جـب هـ) خارجة عن الرباعى الدائرى أ بجـء
∴ ق(∠جـب هـ) = ق(∠ أ ءجـ) = ٨٥°
∴ ق(∠ب ءجـ) = ٨٥° - ٥٥° = ٣٠°

---

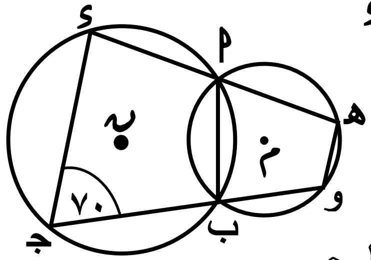
(٤) فى الشكل المقابل
ق(∠أبهـ)=١٠٠°
، ق(∠ءأجـ)=٤٠°
اثبت أن
ق (⌒أء) = ق (⌒جـء)



البرهان

∵ أ بجـء شكل رباعى تمر بروؤسه دائرة
∴ أ بجـء رباعى دائرى
∵ (∠ أ ب هـ) خارجة عن الرباعى الدائرى أ بجـء
∴ ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ أ ءجـ) = ١٠٠°
فى Δ أ ءجـ
∵ مجموع قياسات زوايا Δ الداخلة = ١٨٠°
∴ ق(∠ أجـء) = ١٨٠ - (١٠٠ + ٤٠) = ٤٠°
∴ ق(∠ أجـء) = ق(∠جـأء) = ٤٠°
∴ ق (⌒أء) = ق (⌒جـء) = ٨٠°

(٥) فى الشكل المقابل
م ، ن دائرتين متقاطعتين فى أ ، ب
، ق(∠جـ)=٧٠° أوجد ق(∠و) ثم اثبت
أن هـو // جـء



البرهان

∵ أ بجـء شكل رباعى تمر بروؤسه دائرة
∴ أ بجـء رباعى دائرى
∴ ق(∠ب أء) + ق(∠جـ) = ١٨٠°
∴ ق(∠ب أء) = ١٨٠ - ٧٠ = ١١٠°

∵ أ ب و هـ شكل رباعى تمر بروؤسه دائرة
∴ أ ب و هـ رباعى دائرى
∵ (∠ب أء) خارجة عن الرباعى الدائرى أ ب و هـ
∴ ق(∠ب أء) = ق (∠و) = ١١٠°

∴ ق (∠جـ) + ق(∠و)
= ٧٠° + ١١٠° = ١٨٠°
وهما داخلتان فى جهة واحدة من القاطع
∴ هـو // جـء

تدريبات

س١ أكمل ما يأتى :

(١) الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى الدائرة الواحدة .... فى القياس

(٢) الزوايا المحيطية التى تحصر أقواساً متساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة أو فى عدة دوائر تكون .... فى القياس

(٣) الشكل الرباعى الدائرى هو شكل رباعى تنتمى .... إلى دائرة واحدة

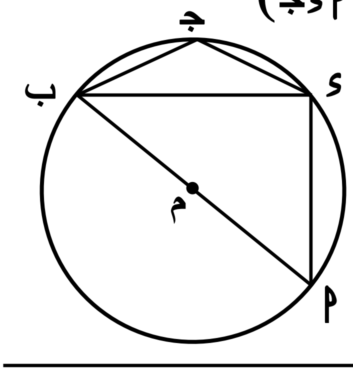
(٤) إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها فإنه يمر برأسيهما .... تكون هذه القاعدة وتراً فيها

(٥) إذا كان الشكل الرباعى دائرياً فإن كل زاويتين متقابلتين ....

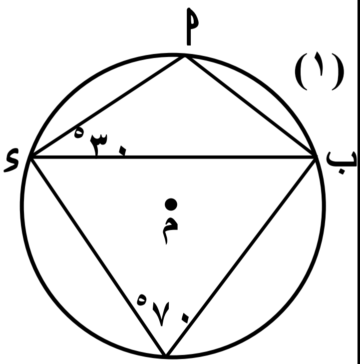
(٦) قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعى الدائرى يساوى قياس الزاوية .... لها

س٢ جء = جب ، ق(∠ ءجب) = ١٤٠°

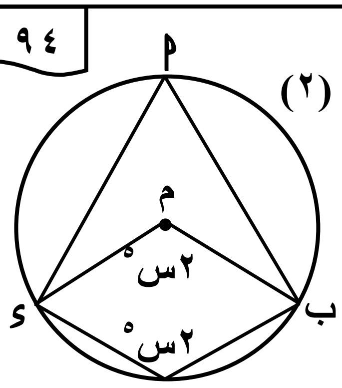
أوجد ق(∠ أ) ، ق(∠ أءج)



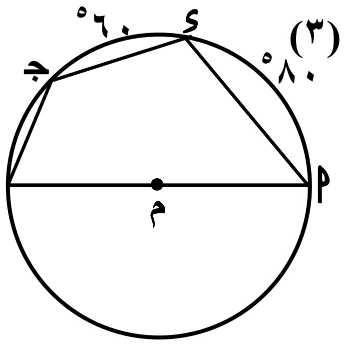
س٣ مستعيناً بمعطيات الشكل أوجد بالبرهان



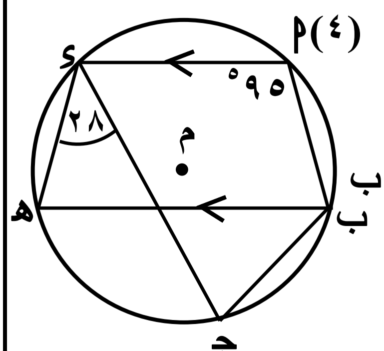
ق(∠ أبء)



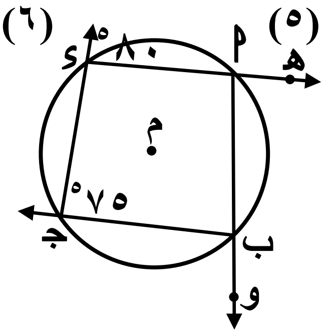
ق(∠ أ)



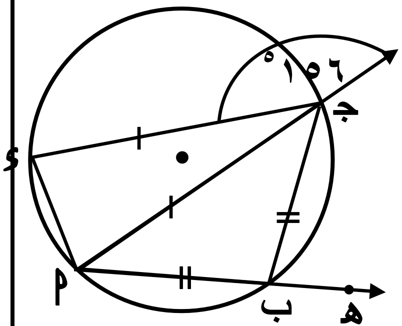
قياسات زوايا الشكل أب ج ء



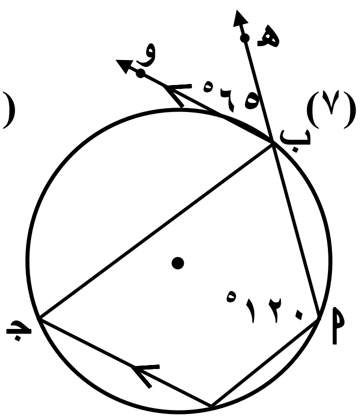
قياسات زوايا الشكل أب ج ء



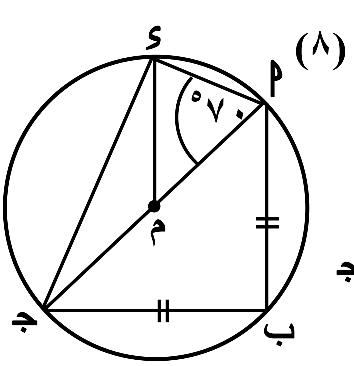
ق(∠ هأب)
ق(∠ جبو)



ق(∠ جبه)
ق(∠ أجب)



ق(∠ ج) ، ق(∠ ء)



ق(∠ بجء)

عكس نظرية (٣)

يكون الشكل الرباعى دائريا إذا تحققت إحدى الشروط الأتية

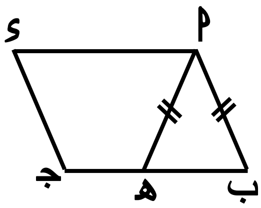
(١) إذا وجدت نقطة فى مستوى الشكل تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه

(٢) إذا وجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع

(٣) إذا وجدت زاويتان متقابلتان فيه متكاملتان (مجموع قياسهم = ١٨٠°)

(٤) إذا وجدت زاوية خارجة عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

(١) فى الشكل المقابل



أ ب جـ ء متوازى أضلاع

، أ ب = أ هـ

اثبت أن أ هـ جـ ء رباعى دائرى

البرهان

∵ أ ب جـ ء متوازى أضلاع

∴ ق (∠ب)= ق (∠ء) ١

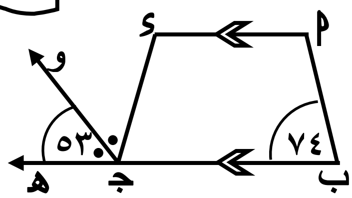
∵ Δ أ ب هـ متساوى الساقين

∴ ق (∠ب) = ق (∠ أ هـ ب) ٢

من ١ ، ٢ ∴ ق (∠ أ هـ ب) الخارجة عن الرباعى أ هـ جـ ء = ق (∠ ء) الداخلة المقابلة للمجاورة لها

∴ أ هـ جـ ء رباعى دائرى

(٢) فى الشكل المقابل



أ ء // ب جـ

، ق (∠ب)=٧٤°

ق (∠و جـ هـ)=٥٣°

، جـو ينصف (∠ ء جـ هـ)

اثبت أن أ ب جـ ء رباعى دائرى

البرهان

∵ جـو ينصف (∠ ء جـ هـ)

∵ ق (∠و جـ هـ)=٥٣°

∴ ق (∠ ء جـ هـ)=٥٣°×٢=١٠٦°

∵ أ ء // ب جـ

∴ ق (∠ ء)= ق (∠ ء جـ هـ) =١٠٦° بالتبادل

∵ ق (∠ب)=٧٤°

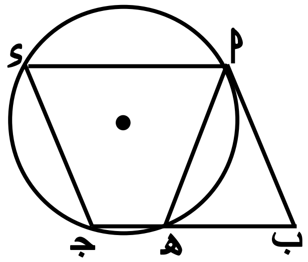
∴ ق (∠ب) + ق (∠ ء)

=٧٤°+١٠٦°=١٨٠° متقابلتان متكاملتان

∴ أ ب جـ ء رباعى دائرى

---

(٣) فى الشكل المقابل



أ ب جـ ء متوازى أضلاع

اثبت أن Δ أ ب هـ متساوى الساقين

البرهان

∵ أ هـ جـ ء شكل رباعى تمر بروؤسه دائرة

∴ أ هـ جـ ء رباعى دائرى

∴ ق (∠ أ هـ ب) الخارجة عن الرباعى الدائرى أ هـ جـ ء = ق (∠ ء) ١

∵ أ ب جـ ء متوازى أضلاع

∴ ق (∠ب) = ق (∠ ء) ٢

من ١ ، ٢ ∴ ق (∠ب) = ق (∠ أ هـ ب)

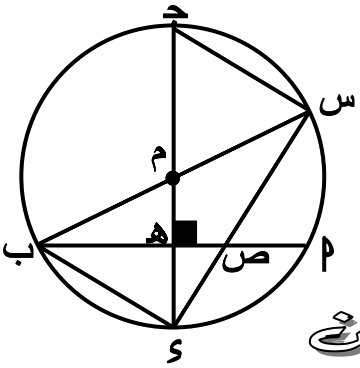
∴ Δ أ ب هـ متساوى الساقين

(٤) فى الشكل المقابل

ب س ، ىجـ قطران فى الدائرة ، جـى ⊥ أب

اثبت أن س ص هـ جـ رباعى دائرى ،

ق(∠ ى ص ب) = ق(∠ ى ب س)



البرهان

∵ جـى قطر فى الدائرة

∴ ق(∠ جـ س ى) = ٩٠°

محيطية مرسومة فى نصف دائرة

∵ جـى ⊥ أب ∴ ق(∠ ص هـ جـ) = ٩٠°

من ١ ، ٢

ق(∠ جـ س ى) + ق(∠ ص هـ جـ)

= ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠° متقابلتان متكاملتان

∴ س ص هـ جـ رباعى دائرى م

∵ س ص هـ جـ رباعى دائرى

∴ ق(∠ ى ص ب) الخارجة عن الرباعى

الدائرى س ص هـ جـ = ق(∠ جـ) ١

∵ ق(∠ جـ) المحيطية = ق(∠ ى ب س) ٢

المحيطية مشتركتان فى ⌒س ى

من ١ ، ٢

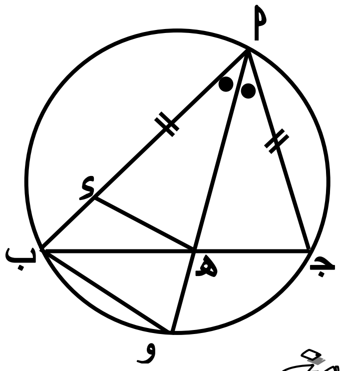
∴ ق(∠ ى ص ب) = ق(∠ ى ب س) م

(٥) فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة فيه

أب > أجـ ، أجـ = أى ، أهـ ينصف (∠ أ)

اثبت أن ب ى هـ و رباعى دائرى



البرهان

فى ΔΔ أجـ هـ ، أى هـ فيهما

أجـ = أى

أهـ ضلع مشترك

ق(∠ جـ أهـ) = ق(∠ ى أهـ)

∴ يتطابق ΔΔ و ينتج أن

ق(∠ جـ) = ق(∠ أى هـ) ١

∵ ق(∠ جـ) المحيطية = ق(∠ و) المحيطية

مشتركتان فى ⌒أب ٢

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ أى هـ) الخارجة عن الرباعى

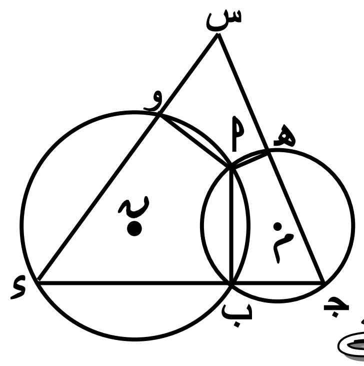
ب ى هـ و = ق(∠ و)

∴ ب ى هـ و رباعى دائرى

(٦) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتين متقاطعتين فى أ ، ب

اثبت أن أ و س هـ رباعى دائرى



البرهان

∵ أ ب جـ هـ شكل رباعى تمر برؤوسه دائرة

∴ أ ب جـ هـ رباعى دائرى

∵ (∠ أ ب ء) خارجة عن الرباعى الدائرى أ ب جـ هـ

∴ ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ هـ جـ) **١**

∵ أ ب ء و شكل رباعى تمر برؤوسه دائرة

∴ أ ب ء و رباعى دائرى

∵ (∠ أ و س) خارجة عن الرباعى الدائرى أ ب ء و

∴ ق(∠ أ و س) = ق(∠ أ ب ء) **٢**

من ١ ، ٢

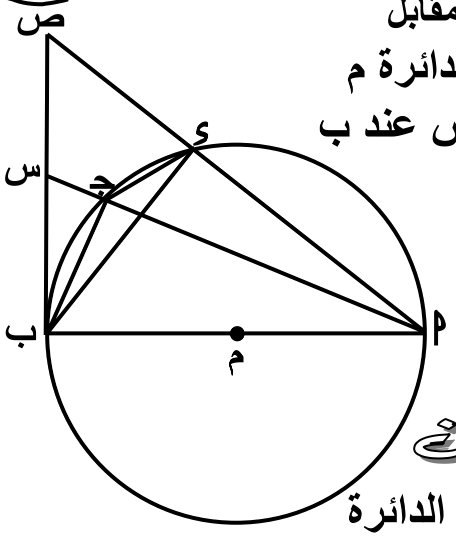
∴ ق(∠ أ هـ جـ) الخارجة عن الرباعى أ و س هـ = ق(∠ أ و س)

∴ أ و س هـ رباعى دائرى

(٧) فى الشكل المقابل

أب قطر فى الدائرة م ، ب ص مماس عند ب

اثبت أن س ص ء جـ رباعى دائرى



البرهان

∵ أب قطر فى الدائرة

∴ ق(∠ أ ء ب) = ٩٠° محيطية مرسومة فى نصف دائرة

∵ ب ص مماس للدائرة م عند ب

∵ م ب نصف قطر

∴ م ب ⊥ ب ص ∴ ق(∠ أ ب ص) = ٩٠°

∵ (∠ أ س ص) خارجة عن Δ أ س ب

∴ ق(∠ أ س ص) = ٩٠° + ق(∠ س أ ب) **١**

∵ ق(∠ جـ أ ب) المحيطية = ق(∠ جـ ء ب) المحيطية مشتركتان فى جـ ب **٢**

∵ ق(∠ أ ء جـ) = ٩٠° + ق(∠ جـ ء ب) **٣**

من ٢ ، ٣

∴ ق(∠ أ ء جـ) = ٩٠° + ق(∠ جـ أ ب) **٤**

من ١ ، ٤

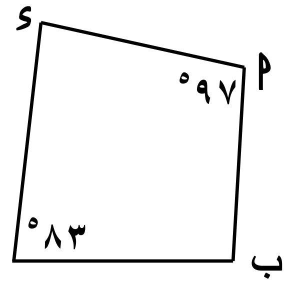
∴ ق(∠ أ ء جـ) الخارجة عن الرباعى س ص ء جـ = ق(∠ أ س ص)

∴ س ص ء جـ رباعى دائرى

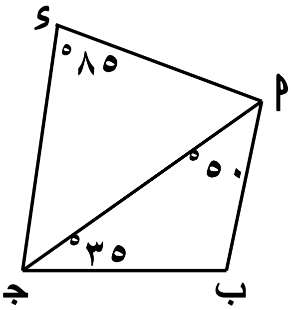
تدريبات

س١ فى كل من الأشكال الآتية اثبت أن ٱب جـ ء رباعى دائرى

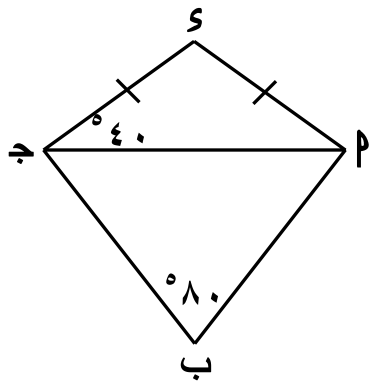
(١)



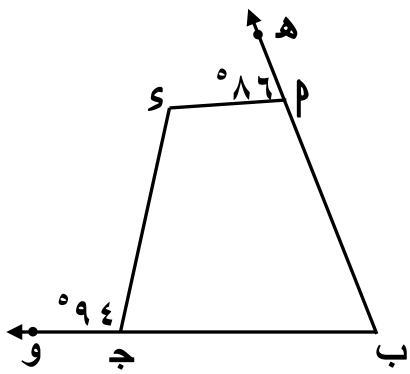
(٢)



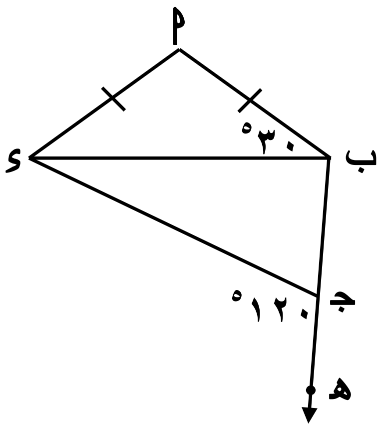
(٣)



(٤)

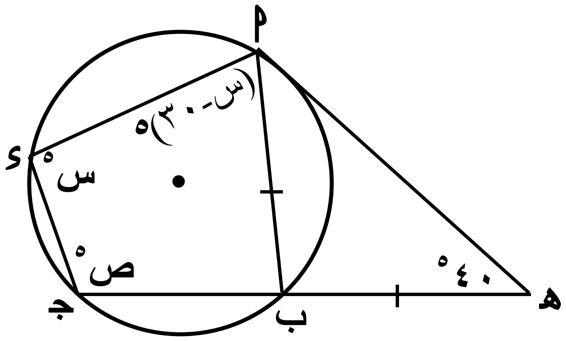


(٥)

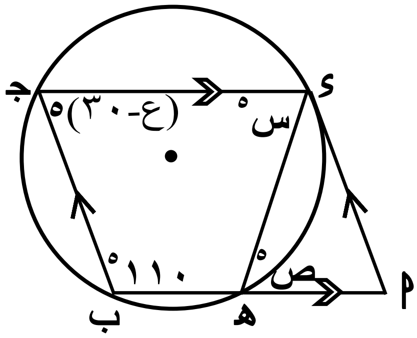


س٢ أوجد قيمة س ، ص ، ع فى كل مما يأتى

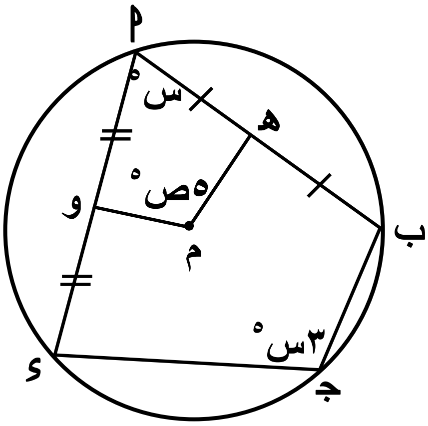
(١)



(٢)



(٣)

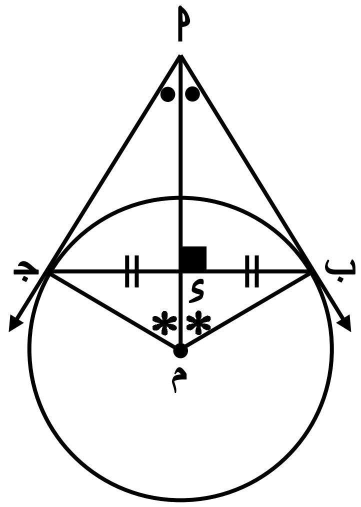


العلاقة بين مماسات الدائرة

نظرية(٤) القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول

نتائج هامة

المستقيم المار بمركز الدائرة و نقطة تقاطع مماسين لها يكون محور تماثل لوتر التماس لهذين المماسين و ينصف الزاوية بين هذين المماسين كما ينصف الزاوية بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التماس



∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماستان للدائرة من نقطة أ

∴ أب = أجـ

∴ $\overline{أم} \perp \overline{بجـ}$

∴ $\overline{أم}$ ينصف $\overline{بجـ}$

∴ $\overline{أم}$ ينصف (∠ أ)

∴ $\overline{أم}$ ينصف (∠ م)

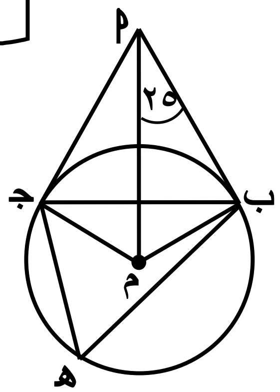
(١) فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماستان للدائرة

، ق(∠ب أ م)=٢٥°

أوجد ق(∠ أجـ ب)

، ق(∠ب هـ جـ)



البرهان

∵ $\overline{أب}$ مماس للدائرة م عند ب

∵ $\overline{مب}$ نصف قطر

∴ $\overline{مب} \perp \overline{أب}$

∴ ق(∠ م ب أ)=٩٠ °

∵ $\overline{أجـ}$ مماس للدائرة م عند جـ

∵ $\overline{مجـ}$ نصف قطر

∴ $\overline{مجـ} \perp \overline{أجـ}$

∴ ق(∠ م جـ أ)=٩٠ °

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماستان للدائرة من نقطة أ

∴ $\overline{أم}$ ينصف (∠ أ)

∴ ق(∠ أ)=٢٥×٢=٥٠ °

∴ أب = أجـ

∴ ق(∠ أب جـ)=ق(∠ أجـ ب)

∴ ق(∠ أجـ ب)=(١٨٠ - ٥٠)÷٢=٦٥° م١

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى= ٣٦٠ °

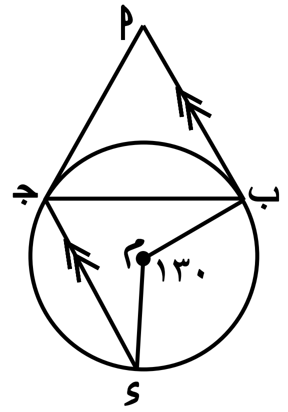
∴ ق(∠ب م جـ)=

٣٦٠ ° - (٩٠+٩٠+٥٠)= ١٣٠°

∵ ق(∠ب هـ جـ) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ق(∠ب م جـ) المركزية مشتركتان فى $\overset{\frown}{بجـ}$

∴ ق(∠ب هـ جـ)=١٣٠°÷٢=٦٥° م٢

(٢) فى الشكل المقابل
أب ، أجـ مماستان للدائرة
، أب // جـ ء
ق(∠ب م ء) = ١٣٠°
، اثبت أن جـ ب
ينصف (∠ أ جـ ء)
،أوجد ق(∠ أ)



البرهان

∵ ق(∠ب جـ ء) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م ء) المركزية مشتركتان فى ⌢ب ء
∴ ق(∠ب جـ ء) = ١٣٠ ÷ ٢ = ٦٥°

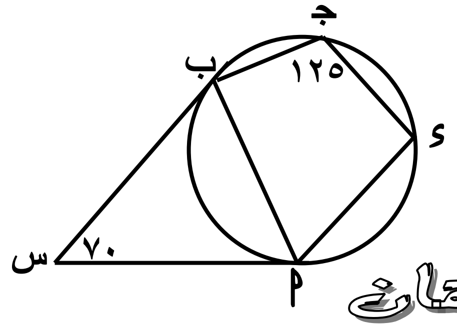
∵ أب // جـ ء
∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ب جـ ء) **١**
= ٦٥° بالتبادل

∵ أب ، أجـ مماستان للدائرة من نقطة أ
∴ أب = أجـ
∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ جـ ب) = ٦٥° **٢**

من ١ ، ٢
∴ ق(∠ب جـ ء) = ق(∠ أ جـ ب) = ٦٥°
∴ جـ ب ينصف (∠ أ جـ ء) م.هـ

فى Δ أ ب جـ
∵ مجموع قياسات زوايا Δ الداخلة = ١٨٠°
∴ ق(∠ أ) = ١٨٠ - (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°
م.هـ

(٣) فى الشكل المقابل
س أ ، س ب مماستان للدائرة ،
ق(∠ س) = ٧٠° ، ق(∠ جـ) = ١٢٥° اثبت أن
أ ب ينصف (∠ ء أ س) ، أ ء // س ب



البرهان

∵ س أ ، س ب مماستان للدائرة من نقطة س
∴ س أ = س ب
فى Δ أ ب س متساوى الساقين
∵ مجموع قياسات زوايا Δ الداخلة = ١٨٠°
∵ ق(∠ س) = ٧٠°
∴ ق(∠ أ ب س) = ق(∠ س أ ب) =
(١٨٠ - ٧٠) ÷ ٢ = ٥٥° **١**

∵ أ ب جـ ء شكل رباعى تمر برؤوسه دائرة
∴ أ ب جـ ء رباعى دائرى
∴ ق(∠ ء أ ب) + ق(∠ جـ) = ١٨٠°
∴ ق(∠ ء أ ب) = ١٨٠ - ١٢٥ = ٥٥° **٢**

من ١ ، ٢
∴ ق(∠ س أ ب) = ق(∠ ء أ ب) = ٥٥°
∴ أ ب ينصف (∠ ء أ س) م.هـ

∵ ق(∠ أ ب س) = ق(∠ ء أ ب) = ٥٥°
و هما فى وضع تبادل
∴ أ ء // س ب م.هـ

(٤) فى الشكل المقابل

أب ، أجـ مماستان للدائرة

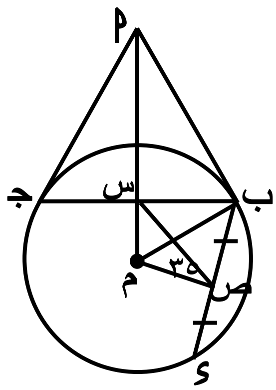
، ص منتصف ب ء ،

ق(∠ م ص س) = ٣٥°

،اثبت أن

س ب ص م رباعى دائرى

،أوجد ق(∠ ب أ جـ)



البرهان

∵ أب ، أجـ مماستان للدائرة من نقطة أ

∴ أب = أجـ

∴ م أ ⊥ ب جـ ∴ ق(∠ ب س م) = ٩٠°

∵ م ص يمر بمركزالدائرة

∵ م ص ينصف ب ء ∴ م ص ⊥ ب ء

∴ ق(∠ ب ص م) = ٩٠°

∴ ق(∠ ب س م) + ق(∠ ب ص م) =

٩٠° + ٩٠° = ١٨٠° متقابلتان متكاملتان

∴ س ب ص م رباعى دائرى م١

∵ س ب ص م رباعى دائرى

∴ ق(∠ م ص س) = ق(∠ م ب س) = ٣٥°

لأنهما مرسومتان على س م و فى جهة واحدة منها

∵ أب مماس للدائرة م ∵ م ب نصف قطر

∴ م ب ⊥ أب ∴ ق(∠ م ب أ) = ٩٠°

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠ - ٣٥ = ٥٥°

∵ أب = أجـ

فى Δ أ ب جـ متساوى الساقين

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ جـ) = ٥٥°

∵ مجموع قياسات زوايا Δ الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ ب أ جـ) = ١٨٠ - (٥٥+٥٥) = ٧٠°

م٢

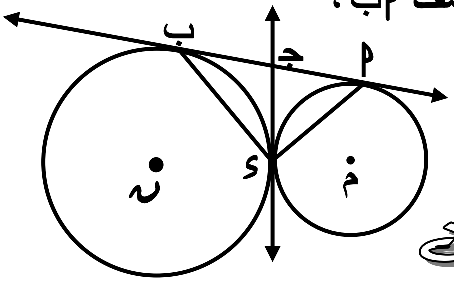
(٥) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتين متماستين من الخارج فى ء

، أب، جـ ء مماسات مشتركة للدائرتين

اثبت أن جـ منتصف أب ،

أء ⊥ ب ء



البرهان

∵ جـ أ ، جـ ء مماستان للدائرةمن نقطة جـ

∴ جـ أ = جـ ء ١

∵ جـ ب ، جـ ء مماستان للدائرة من نقطة جـ

∴ جـ ب = جـ ء ٢

من ١ ، ٢

∴ جـ أ = جـ ب ∴ جـ منتصف أب م١

فى Δ أ ب ء

∵ جـ منتصف أب ∴ ء جـ متوسط

∵ جـ أ = جـ ب = جـ ء

∴ ء جـ = $\frac{1}{2}$ أب

∴ ء جـ متوسط خارج من رأس القائمة

∴ ق(∠ أ ء ب) = ٩٠° ∴ أ ء ⊥ ب ء م٢

ملاحظات

عدد المماسات المشتركة لدائرتين :

متباعدتين = ٤

متماستين من الخارج = ٣

متماستين من الداخل = ١

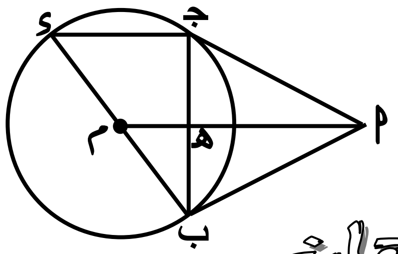
متقاطعتين = ٢

متداخلتين = صفر

(٦) فى الشكل المقابل

أب ، أجـ مماستان للدائرة ، ب ء قطر فى الدائرة

اثبت أن أم // جـ ء



البرهان

∵ أب ، أجـ مماستان للدائرة من نقطة أ

∴ أم ⊥ ب جـ ∴ ق(∠ أهـجـ) = ٩٠° **١**

∵ ب ء قطر فى الدائرة

∴ ق(∠ب جـ ء) = ٩٠° **٢**

محيطية مرسومة فى نصف دائرة

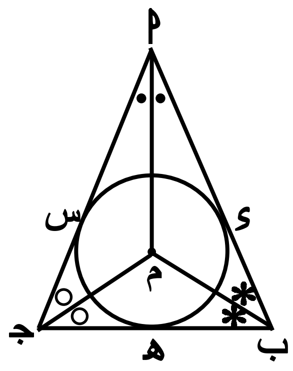
من ١ ، ٢

∴ ق(∠ أهـجـ) = ق(∠ب جـ ء) = ٩٠°

و هما فى وضع تبادل ∴ أم // جـ ء

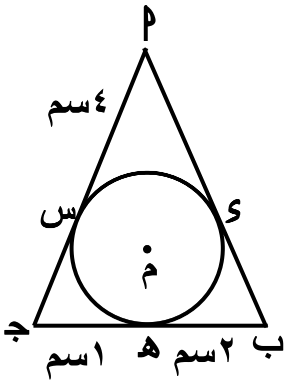
تعريف : الدائرة الداخلة لمضلع هى الدائرة التى تمس أضلاعه من الداخل

ملاحظة : مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة



(٧) فى الشكل المقابل

أب ، أجـ ، ب جـ مماسات للدائرة م، أس = ٤ سم ، ب هـ = ٢ سم ، هـ جـ = ١ سم أوجد محيط المثلث أب جـ



البرهان

∵ أء ، أس

مماستان للدائرة من نقطة أ

∴ أء = أس = ٤سم

∵ ب ء ، ب هـ

مماستان للدائرة

من نقطة ب

∴ ب ء = ب هـ = ٢سم

∵ جـهـ ، جـس

مماستان للدائرة من نقطة جـ

∴ جـهـ = جـس = ١سم

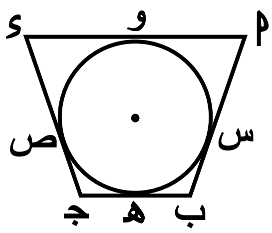
∴ محيط المثلث أب جـ

= ٤+٤+٢+٢+١+١

= ١٤سم

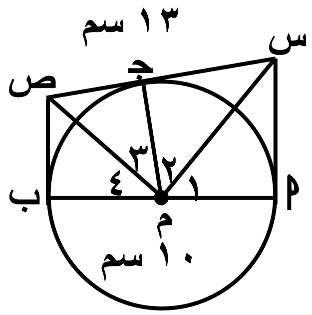
فى الشكل المقابل

أب + ء جـ = أ ء + ب جـ



(٨) فى الشكل المقابل

ٮ س ، ب ص ، س ص مماسات للدائرة ، ٮب قطر فى الدائرة ، ٮب = ١٠ سم ، س ص = ١٣سم اثبت أن س م ⊥ ص م ، ثم أوجد مساحة الشكل ٮ س ص ب



البرهان

∵ س ٮ ، س جـ مماستان للدائرة من نقطة س

∴ س م ينصف (∠ ٮ م جـ)

∴ ق(∠ ٮ م س) = ق(∠ س م جـ) **١**

∵ ص جـ ، ص ب مماستان للدائرة من نقطة ص

∴ ص م ينصف (∠ ب م جـ)

∴ ق(∠ جـ م ص) = ق(∠ ص م ب) **٢**

∵ م ∈ ٮب

∴ ق(∠ ٮ م س) + ق(∠ ص م ب) + ق(∠ س م جـ) + ق(∠ جـ م ص) = ١٨٠° **٣**

من ١ ، ٢ ، ٣

∴ ق(∠ س م جـ) + ق(∠ جـ م ص) = ٩٠°

∴ س م ⊥ ص م **م.ط**

∵ ٮ س ، ب ص مماسان مرسومان من نهايتى قطر في الدائرة م

∴ ٮ س // ب ص

∴ الشكل ٮ س ص ب شبه منحرف

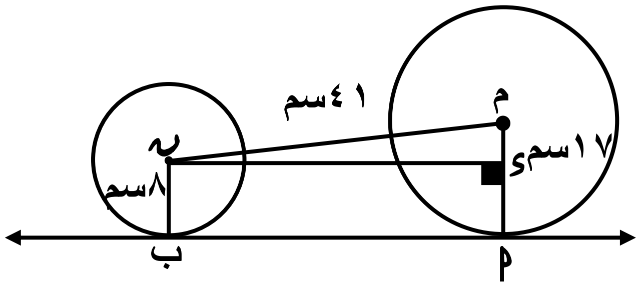
∵ ٮ س + ب ص = س ص = ١٣ سم

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (ٮ س + ب ص) × ٮب

= $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ١٠ = ٦٥ سم^{٢} **م.ط**

(٩) فى الشكل المقابل

ٮب مماس مشترك للدائرتين م ، ن ، نق$_{ن}$ = ٨ سم، نق$_{م}$ = ١٧سم ، م ن = ٤١سم أوجد طول ٮب



العمل : نرسم ن ى ⊥ ٮ م

البرهان

∵ ٮب مماس للدائرة م ∵ م ٮ نصف قطر

∴ م ٮ ⊥ ٮب

∵ ٮب مماس للدائرة ن ∵ ن ب نصف قطر

∴ ن ب ⊥ ٮب

∴ الشكل ٮ ب ن ى مستطيل

∴ ن ب = ى ٮ = ٨سم

∵ م ٮ = ١٧ سم ∴ م ى = ١٧ − ٨ = ٩ سم

فى Δ م ى ن القائم فى ى

(ى ن)^{٢} = (م ن)^{٢} − (م ى)^{٢}

(ى ن)^{٢} = (٤١)^{٢} − (٩)^{٢} = ١٦٠٠

∴ م هـ = $\sqrt{١٦٠٠}$ = ٤٠ سم

∴ ٮ ب = ى ن = ٤٠ سم

تدريبات

س١ أكمل ما يأتى :

(١) القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة .... فى الطول

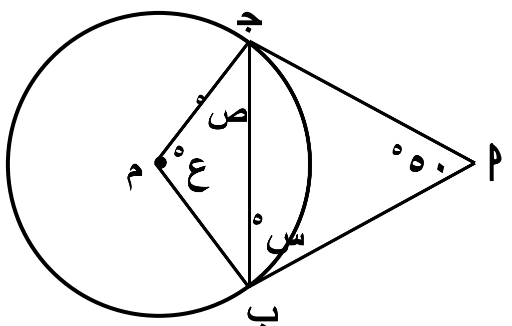
(٢) عدد المماسات المشتركة لدائرتين :
متباعدتين = ...
متماستين من الخارج = ...
متماستين من الداخل =........
متقاطعتين = ...
متداخلتين =........

(٣) مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع ....

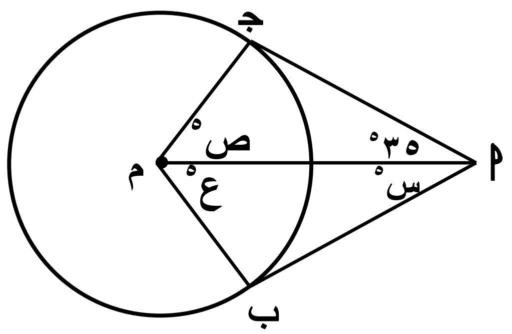
(٤) مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو نقطة تقاطع ....

س٢ فى كل من الأشكال الآتية $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة أوجد قيمة س ، ص ، ع فى كل مما يأتى

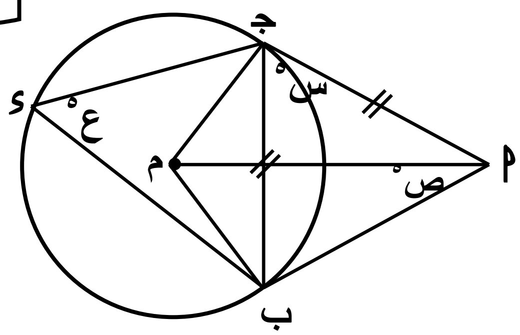
(١)



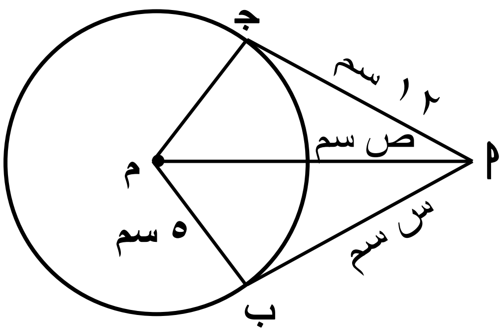
(٢)



(٣)



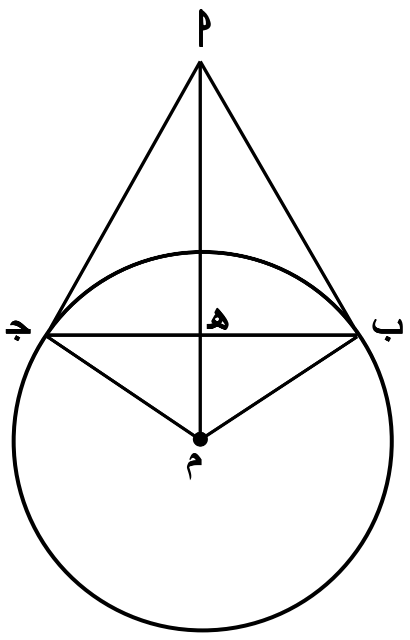
(٤)



س٣ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة

ق(∠ب م جـ) = ١٢٠° ، أم = ٨ سم

أوجد طول $\overline{\text{بجـ}}$



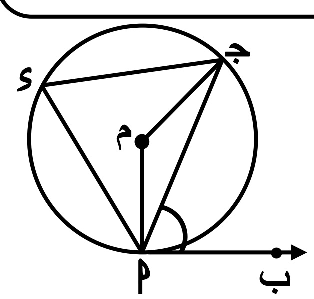
الزاوية المماسية

الزاوية المماسية هى الزاوية المكونة من اتحاد شعاعين أحدهما مماس للدائرة والآخر يحتوى وتراً فى الدائرة يمر بنقطة التماس

نظرية (٥) قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس

نتيجة : قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

ملاحظة : قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها



$\overleftarrow{أب}$ مماس للدائرة

ق(∠ب أجـ) المماسية

= ق(∠ أ ء جـ) المحيطية المشتركة معها فى $\overset{\frown}{أجـ}$

ق(∠ب أجـ) المماسية

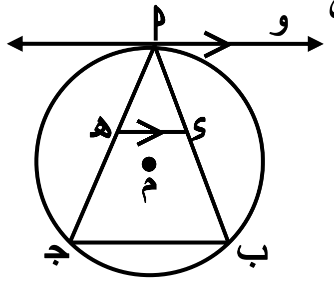
$= \frac{1}{2}$ ق(∠ أ م جـ) المركزية المشتركة معها فى $\overset{\frown}{أجـ}$

ق(∠ب أجـ) المماسية

$= \frac{1}{2}$ ق $\overset{\frown}{أجـ}$ المقابل لها

(١) فى الشكل المقابل $\overleftrightarrow{أو}$ مماس للدائرة م ، $\overline{أو}$ // $\overline{ءهـ}$

اثبت أن ء ب جـ هـ رباعى دائرى



البرهان

∵ $\overleftrightarrow{أو}$ مماس للدائرة م عند أ

∴ ق(∠و أب) المماسية

= ق(∠جـ) المحيطية **١**

المشتركة معها فى $\overset{\frown}{أب}$

∵ $\overline{أو}$ // $\overline{ءهـ}$

∴ ق(∠و أب) = ق(∠ أ ء هـ) بالتبادل **٢**

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ أ ء هـ) الخارجة عن الرباعى ء ب جـ هـ

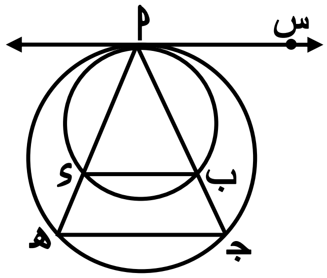
= ق(∠جـ) ∴ ء ب جـ هـ رباعى دائرى

---

(٢) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الداخل فى أ ، $\overleftrightarrow{أس}$ مماس مشترك للدائرتين

اثبت أن $\overline{ب ء}$ // $\overline{هـ جـ}$



البرهان

∵ $\overleftrightarrow{أس}$ مماس مشترك للدائرتين

∴ ق(∠س أجـ) المماسية

= ق(∠هـ) المحيطية **١**

المشتركة معها فى $\overset{\frown}{أجـ}$

∴ ق(∠س أجـ) المماسية = ق(∠ أ ء ب) **٢**

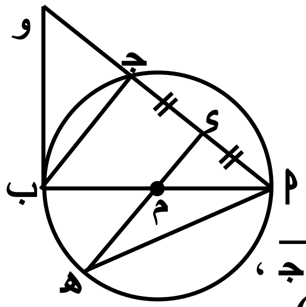
المحيطية

المشتركة معها فى $\overset{\frown}{أب}$

من ١ ، ٢ ∴ ق(∠هـ) = ق(∠ أ ء ب)

وهما فى وضع تناظر ∴ $\overline{ب ء}$ // $\overline{هـ جـ}$

(٣) فى الشكل المقابل



بو مماس للدائرة م

، ى منتصف أجـ ، أب قطر

اثبت أن م ب و ى رباعى دائرى ، ىهـ // بجـ ،

ق(∠و) = ٢ ق(∠ب أ هـ)

البرهان

∵ وب مماس للدائرة م عند ب

∵ مب نصف قطر

∴ مب ⊥ وب ∴ ق(∠مبو) = ٩٠° **١**

∵ مى يمر بمركز الدائرة ∵ مى ينصف أجـ

∴ مى ⊥ أجـ ∴ ق(∠مىجـ) = ٩٠° **٢**

من ١ ، ٢

∴ ق(∠مبو) + ق(∠مىجـ) =

٩٠° + ٩٠° = ١٨٠° متقابلتان متكاملتان

∴ م ب و ى رباعى دائرى **م١**

∵ أب قطر فى الدائرة ∴ ق(∠أجـب) = ٩٠°

محيطية مرسومة فى نصف دائرة

∴ ق(∠أجـب) = ق(∠أىم)

وهما فى وضع تناظر ∴ ىهـ // بجـ **م٢**

∵ (∠هـمب) خارجة عن الرباعى الدائرى م ب و ى

∴ ق(∠هـمب) = ق(∠و) **٣**

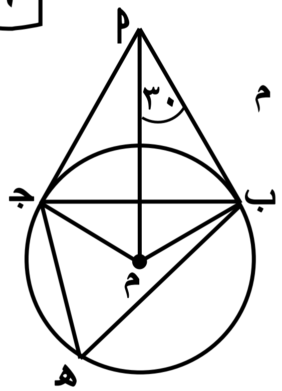
∵ ق(∠هـمب) المركزية = ٢ ق(∠ب أ هـ) **٤**

المحيطية المشتركة معها فى ⌒هـب

من ٣ ، ٤

∴ ق(∠و) = ٢ ق(∠ب أ هـ) **م٣**

(٤) فى الشكل المقابل



أب ، أجـ مماستان للدائرة م

، ق(∠ب أ م) = ٣٠°

اثبت أن أ ب م جـ رباعى دائرى ،

و أوجد ق(∠ب هـ جـ)

البرهان

∵ أب مماس للدائرة م عند ب

∵ مب نصف قطر

∴ مب ⊥ أب ∴ ق(∠مبأ) = ٩٠° **١**

∵ أجـ مماس للدائرة م عند جـ

∵ مجـ نصف قطر

∴ مجـ ⊥ أجـ ∴ ق(∠مجـأ) = ٩٠° **٢**

من ١ ، ٢

∴ ق(∠مبأ) + ق(∠مجـأ) =

٩٠° + ٩٠° = ١٨٠° متقابلتان متكاملتان

∴ أ ب م جـ رباعى دائرى **م١**

∵ أب ، أجـ مماستان للدائرة من نقطة أ

∴ أب = أجـ ∴ أم ينصف (∠أ)

∴ ق(∠أ) = ٣٠ × ٢ = ٦٠°

∵ أ ب م جـ رباعى دائرى

∴ ق(∠ب م جـ) = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°

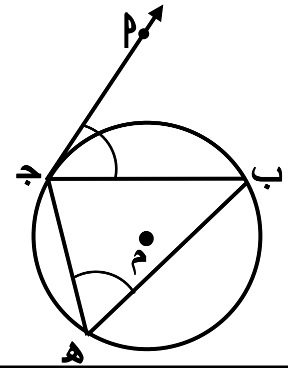
∵ ق(∠ب م جـ) المركزية = ٢ ق(∠ب هـ جـ)

المحيطية المشتركة معها فى ⌒بجـ

∴ ق(∠ب هـ جـ) = ١٢٠° ÷ ٢ = ٦٠° **م٢**

عكس نظرية (٥)

إذا رسم شعاع من إحدى نقطتى النهاية لوتر فى دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماساً للدائرة



إذا كان

ق(∠ أ جـ ب) =

ق(∠جـ هـ ب) المحيطية

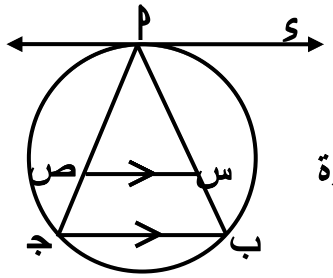
فإن جـ أ مماس للدائرة عند جـ

---

(١) فى الشكل المقابل

أ ء مماس للدائرة ، س ص // ب جـ ،

اثبت أن أ ء مماس للدائرة المارة بالنقط أ ،س، ص



البرهان

∵ أ ء مماس للدائرة م عند أ

∴ ق(∠ ء أ ب) المماسية

= ق(∠ أ جـ ب) المحيطية **١**

المشتركة معها فى ⌒أب

∵ س ص // ب جـ

∴ ق(∠ أ ص س) = ق(∠ أ جـ ب) بالتناظر **٢**

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ ء أ ب) = ق(∠ أ ص س)

∴ أ ء مماس للدائرة المارة بالنقط أ ،س، ص

(٢) فى الشكل المقابل

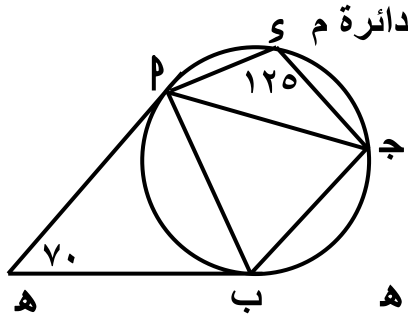
هـ أ ، هـ ب مماستان للدائرة م

، ق(∠هـ) = ٧٠°

، ق(∠ ء) = ١٢٥°

اثبت أن أب = أجـ

، أجـ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب، هـ



البرهان

∵ هـ أ ، هـ ب مماستان للدائرة من نقطة هـ

∴ هـ أ = هـ ب

فى Δ هـ أ ب متساوى الساقين

∵ مجموع قياسات زوايا Δ الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠هـ أ ب) = ق(∠هـ ب أ)

= (١٨٠ - ٧٠) ÷ ٢ = ٥٥°

∵ ق(∠هـ ب أ) المماسية

= ق(∠ أ جـ ب) المحيطية المشتركة معها فى ⌒أب

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ٥٥°

∵ أ ب جـ ء شكل رباعى تمر برؤوسه دائرة

∴ أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ١٨٠° - ١٢٥° = ٥٥°

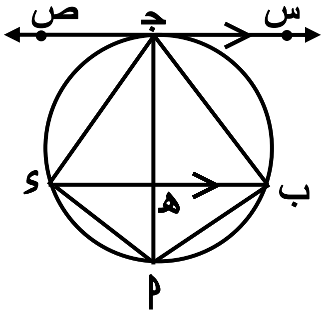
∴ ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ أ ب جـ) = ٥٥°

∴ أب = أجـ **م١**

∴ ق(∠ ب أ جـ) = ١٨٠ - (٥٥ + ٥٥) = ٧٠°

∴ ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠هـ)

∴ أجـ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب، هـ **م٢**



(٣) فى الشكل المقابل

س ص مماس للدائرة

، س ص // ب ء ،

اثبت أن م جـ ينصف

(∠ ب م ء)

، ب جـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ هـ م ب

البرهان

∵ س ص // ب ء ∴ ق جـ ب = ق جـ ء

∴ ق (∠ ب م جـ) المحيطية = ق (∠ ء م جـ) المحيطية

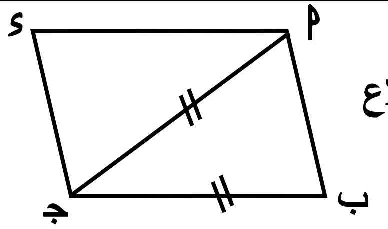
∴ م جـ ينصف (∠ ب م ء) م

∵ ق جـ ء = ق جـ ب

∴ ق (∠ جـ ب ء) المحيطية = ق (∠ جـ م ب) المحيطية

∴ ب جـ مماس للدائرة المارة

برؤوس Δ هـ م ب م



(٤) فى الشكل المقابل

م ب جـ ء متوازى أضلاع

، جـ م = جـ ب

اثبت أن جـ ء

مماس للدائرة المارة برؤوس Δ م ب جـ

البرهان

∵ Δ جـ م ب متساوى الساقين

∴ ق (∠ ب م جـ) = ق (∠ م ب جـ) ١

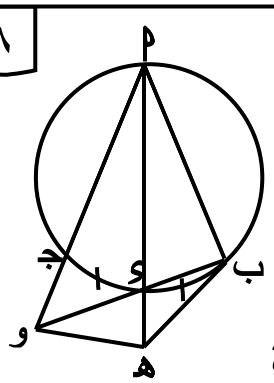
∵ م ب جـ ء متوازى أضلاع ∴ م ب // جـ ء

∴ ق (∠ ب م جـ) = ق (∠ م جـ ء) بالتبادل ٢

من ١ ، ٢

∴ ق (∠ م جـ ء) = ق (∠ م ب جـ)

∴ جـ ء مماس للدائرة المارة برؤوس Δ م ب جـ



(٥) فى الشكل المقابل

هـ ب مماس للدائرة

، ء منتصف ب جـ

اثبت أن م ب هـ و

رباعى دائرى

، و هـ مماس للدائرة المارة

بالنقط م ، ء ، و

البرهان

∵ هـ ب مماس للدائرة عند ب

∴ ق (∠ هـ ب ء) المماسية

= ق (∠ ب م ء) المحيطية المشتركة معها فى ب ء ١

∵ ء منتصف ب جـ

∴ ق ب ء = ق ء جـ

∴ ق (∠ ب م ء) = ق (∠ جـ م ء) ٢

من ١ ، ٢

∴ ق (∠ هـ ب ء) = ق (∠ جـ م ء)

وهما مرسومتان على هـ و وفى جهة واحدة منها

∴ م ب هـ و رباعى دائرى م

∵ م ب هـ و رباعى دائرى

∴ ق (∠ هـ و ب) = ق (∠ هـ م ب) ٣

لأنهما مرسومتان على ب هـ و فى جهة واحدة منها

، ∵ ق (∠ هـ م ب) = ق (∠ هـ م و) برهاناً ٤

من ٣ ، ٤

∴ ق (∠ هـ و ب) = ق (∠ هـ م و)

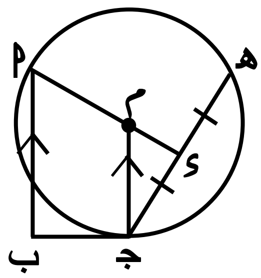
∴ و هـ مماس للدائرة المارة بالنقط م ، ء ، و

م

(٦) فى الشكل المقابل

جب مماس للدائرة ، م ج // أب ،

ء منتصف جه اثبت أن أ ب ج ء رباعى دائرى



البرهان

∵ م ء يمر بمركز الدائرة

∵ م ء ينصف جه

∴ م ء ⊥ جه

∴ ق(∠ م ء ج) = ٩٠°

∵ جب مماس للدائرة م عند ج

∵ م ج نصف قطر

∴ م ج ⊥ جب

∴ ق(∠ م ج ب) = ٩٠°

∵ م ج // أب

∴ ق(∠ م ج ب) + ق(∠ أ ب ج) = ١٨٠°

لأنهما داخلتان و فى جهة واحدة من القاطع

∴ ق(∠ أ ب ج) = ١٨٠° - ٩٠° = ٩٠°

∴ ق(∠ م ء ج) + ق(∠ أ ب ج) =

٩٠° + ٩٠° = ١٨٠° متقابلتان متكاملتان

∴ أ ب ج ء رباعى دائرى

(٧) فى الشكل المقابل

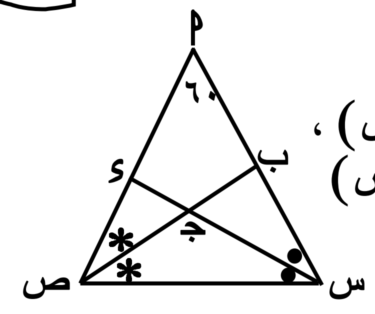
ق(∠ أ) = ٦٠°

س ء ينصف (∠ س) ،

ص ب ينصف (∠ ص)

اثبت أن أ ب ج ء

رباعى دائرى



البرهان

فى Δ أ س ص

∵ مجموع قياسات زوايا Δ الداخلة = ١٨٠°

∵ ق(∠ أ) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ س ص) + ق(∠ أ ص س) =

١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°

∵ س ء ينصف (∠ س)

، ص ب ينصف (∠ ص)

∴ ق(∠ ج س ص) + ق(∠ ج ص س) =

= ١٢٠° ÷ ٢ = ٦٠°

فى Δ ج س ص

∵ مجموع قياسات زوايا Δ الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ س ج ص) = ١٨٠ - ٦٠° = ١٢٠°

∴ ق(∠ ب ج ء) = ق(∠ س ج ص) = ١٢٠°

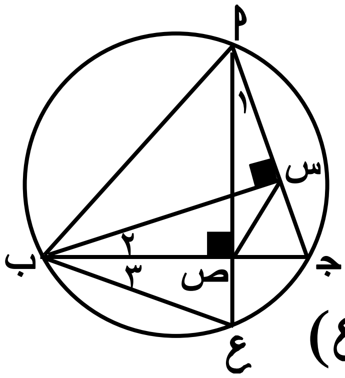
بالتقابل بالرأس

∴ ق(∠ ب ج ء) + ق(∠ أ) =

١٢٠° + ٦٠° = ١٨٠° متقابلتان متكاملتان

∴ أ ب ج ء رباعى دائرى

(٨) فى الشكل المقابل



ب س ⊥ م جـ

، م ص ⊥ جـ ب

اثبت أن م ب ص س رباعى دائرى ،

ب جـ ينصف (∠ س ب ع)

البرهان

∵ ب س ⊥ م جـ

∴ ق(∠ م س ب) = ٩٠°

∵ م ص ⊥ جـ ب

∴ ق(∠ م ص ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ م س ب) = ق(∠ م ص ب)

وهما مرسومتان على م ب و فى جهة واحدة منها

∴ م ب ص س رباعى دائرى **م**

∵ م ب ص س رباعى دائرى

∴ ق(∠ س م ص) = ق(∠ س ب ص) **١**

لأنهما مرسومتان على س ص و فى جهة واحدة منها

٢

∵ ق(∠ جـ م ع) المحيطية = ق(∠ جـ ب ع) المحيطية مشتركتان فى جـ ع

من ١ ، ٢

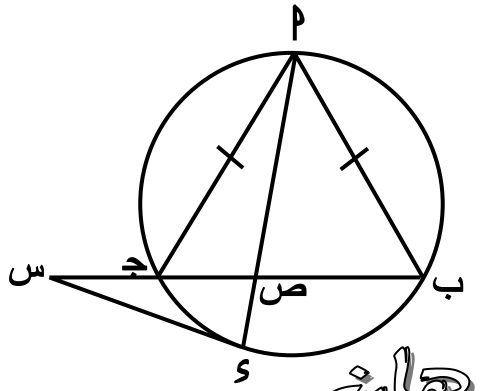
∴ ق(∠ س ب ص) = ق(∠ ص ب ع)

∴ ب جـ ينصف (∠ س ب ع) **م**

(٩) فى الشكل المقابل

م ب = م جـ ، ء س مماس للدائرة عند ء

اثبت أن س ص = س ء



البرهان

∵ م ب = م جـ

∴ ق م ب⌒ = ق م جـ⌒

∵ ء س مماس للدائرة

∴ ق(∠ م ء س) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق م جـ ء⌒ المقابل لها **١**

ق(∠ س ص ء) = $\frac{1}{2}$ [ق(م ب⌒) + ق(جـ ء⌒)]

∵ ق م ب⌒ = ق م جـ⌒

∴ ق(∠ س ص ء) = $\frac{1}{2}$ [ق(م جـ⌒) + ق(جـ ء⌒)]

∴ ق(∠ س ص ء) = $\frac{1}{2}$ ق م جـ ء⌒ **٢**

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ م ء س) = ق(∠ س ص ء)

∴ س ص = س ء

تدريبات

س١ أكمل ما يأتى :

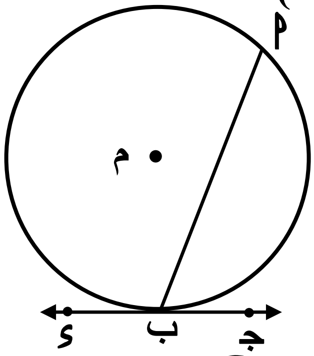
(١) قياس الزاوية المماسية يساوى .... الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوى .... الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

(٣) قياس الزاوية المماسية يساوى .... القوس المحصور بين ضلعيها

س٢ إذا كان $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مماس للدائرة أوجد ما يأتى

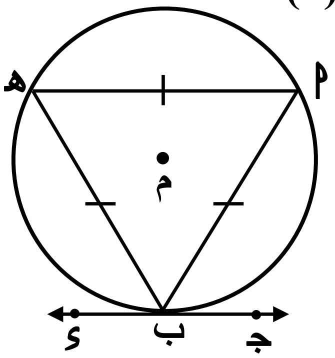
(١)



ق $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ الأكبر = ٢٣٠°

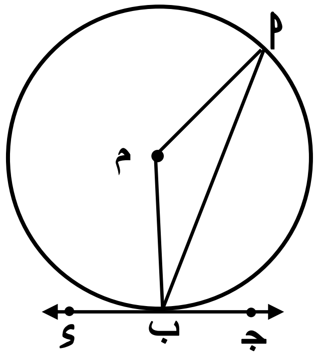
ق(∠ أ ب جـ) = ...°

(٢)



ق(∠ أ ب جـ) = ...°

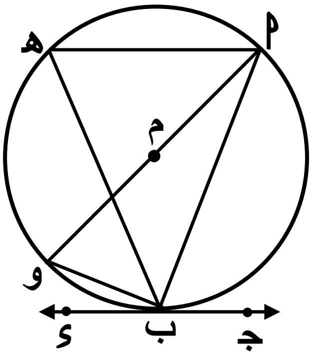
(٣)



ق(∠ ب أ م) = ٢٠°

ق(∠ أ ب جـ) = ...°

(٤)



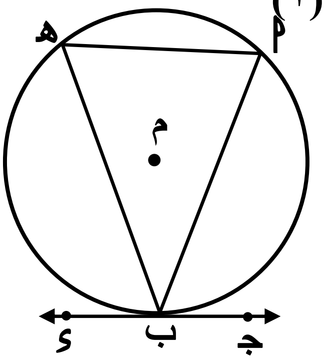
ق(∠ ب أ و) = ٢٠°

ق(∠ هـ) = ...°

ق(∠ أ ب جـ) = ...°

س٣ مستعيناً بمعطيات الشكل أوجد ما يأتى

(١)

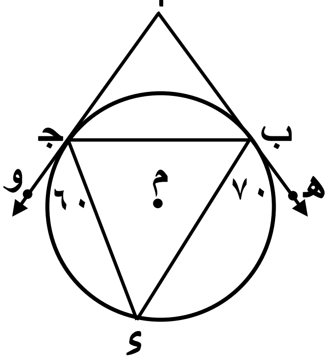


ق(∠ جـ ب هـ) = ١٣٠°

ق $\overset{\frown}{\text{ب هـ}}$ = ...°

ق(∠ أ) = ...°

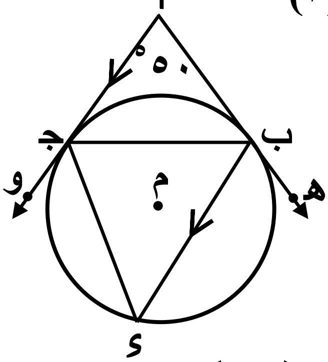
(٢)



ق(∠ ء) = ...°

ق(∠ أ) = ...°

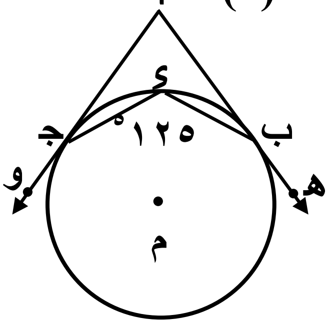
(٣)



ق(∠ ء) = ...°

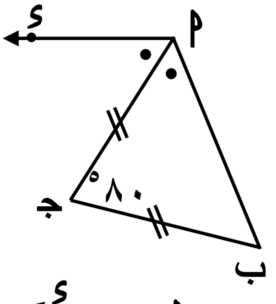
ق $\overset{\frown}{\text{ب ء}}$ = ...°

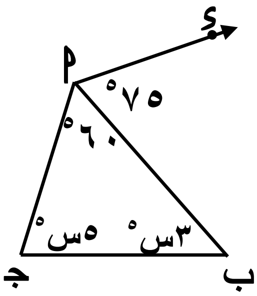
(٤)

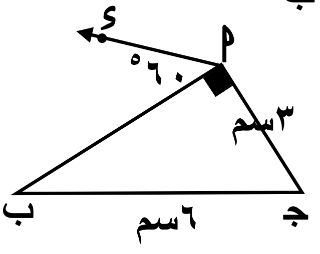


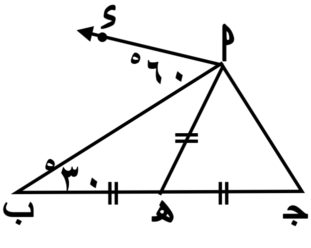
ق(∠ أ) = ...°

س٤ اثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماساً للدائرة التى تمر برؤوس المثلث أ ب جـ



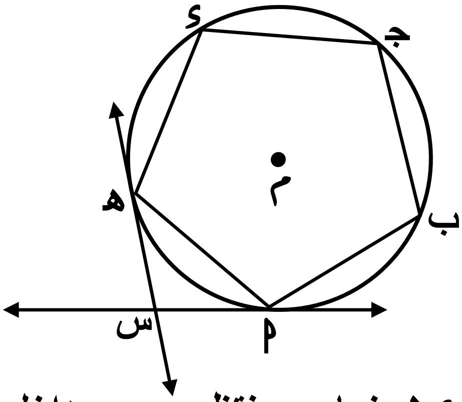






أمثلة متنوعة

(١) فى الشكل المقابل



ٮ ب جـ ء هـ خماسي منتظم مرسوم داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{ٮ س}$ ، $\overleftrightarrow{س هـ}$ مماسان للدائرة

أوجد ق $\overset{\frown}{ٮ هـ}$ ، ق (∠ ٮ س هـ)

البرهان

∵ الشكل ٮ ب جـ ء هـ خماسي منتظم

∴ أضلاعه جميعاً متساوية فى الطول

∴ ٮ ب = ب جـ = جـ ء = ء هـ = هـ ٮ

∴ ق $\overset{\frown}{ٮ ب}$ = ق $\overset{\frown}{ب جـ}$ = ق $\overset{\frown}{جـ ء}$ = ق $\overset{\frown}{ء هـ}$ = ق $\overset{\frown}{هـ ٮ}$

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠ °

∴ ق $\overset{\frown}{ٮ هـ}$ = ٣٦٠ ° ÷ ٥ = ٧٢ ° م١

∵ $\overleftrightarrow{ٮ س}$ مماس للدائرة م عند ٮ

ق (∠ هـ ٮ س) المماسية

= $\frac{١}{٢}$ ق $\overset{\frown}{ٮ هـ}$ المحصور بين ضلعيها

= ٧٢ ° ÷ ٢ = ٣٦ °

∵ $\overleftrightarrow{ٮ س}$ ، $\overleftrightarrow{س هـ}$ مماسان للدائرة

∴ ٮ س = س هـ

∴ ق (∠ هـ ٮ س) = ق (∠ ٮ هـ س) = ٣٦ °

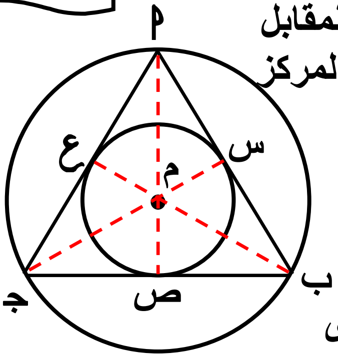
فى Δ س هـ ٮ متساوى الساقين

∵ مجموع قياسات زوايا Δ الداخلة = ١٨٠ °

∴ ق (∠ ٮ س هـ) = ١٨٠ − (٣٦ + ٣٦) = ١٠٨ °

م٢

(٢) فى الشكل المقابل دائرتان متحدتا المركز طولا نصفى قطريهما ٤ سم ، ٢ سم



اثبت أن Δ ٮ ب جـ متساوى الأضلاع و أوجد مساحته

العمل

نصل $\overline{ٮ ص}$ ، $\overline{ب ع}$ ، $\overline{جـ س}$

البرهان

∵ مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

∵ مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه

∴ $\overline{ٮ ص}$ ينصف (∠ ٮ) و عمودى على $\overline{ب جـ}$ و ينصف $\overline{ب جـ}$ ∴ $\overline{ٮ ص}$ محور تماثل Δ ٮ ب جـ

بالمثل $\overline{ب ع}$ ، $\overline{جـ س}$

∴ Δ ٮ ب جـ له ثلاثة محاور تماثل

∴ Δ ٮ ب جـ متساوى الأضلاع م١

فى Δ ب ص م القائم فى ص

∵ م ب = نق$_١$ = ٤ سم

∵ ص م = نق$_٢$ = ٢ سم

(ب ص)^٢ = (م ب)^٢ − (ص م)^٢

(ب ص)^٢ = (٤)^٢ − (٢)^٢ = ١٢

∴ ب ص = $\sqrt{١٢}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ سم

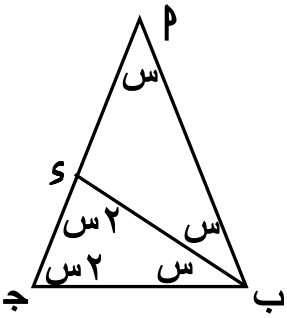
∴ ب جـ = ٢ $\sqrt{٣}$ × ٢ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

طول الارتفاع $\overline{ٮ ص}$ = ٮ م + م ص = نق$_١$ + نق$_٢$ = ٤ + ٢ = ٦ سم

مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

مساحة Δ ٮ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ $\sqrt{٣}$ × ٦ = ١٢ $\sqrt{٣}$ سم^٢

(٣) فى الشكل المقابل



م ب = م جـ

، ب جـ = ب ى = ى م

أوجد ق (∠ م)

البرهان

بفرض ق (∠ م) = س

فى Δ م ى ب متساوى الساقين

∵ م ى = ب ى

∴ ق (∠ م) = ق (∠ م ب ى) = س

∵ (∠ ب ى جـ) خارجة عن Δ م ب ى

∴ ق (∠ ب ى جـ) = ٢ س

فى Δ ب ى جـ متساوى الساقين

∵ ب ى = ب جـ

∴ ق (∠ جـ) = ق (∠ ب ى جـ) = ٢ س

فى Δ م ب جـ متساوى الساقين

∵ م ب = م جـ

∴ ق (∠ م ب جـ) = ق (∠ جـ) = ٢ س

∴ ق (∠ ى ب جـ) = ٢ س - س = س

فى Δ م ب جـ

∵ مجموع قياسات زوايا Δ الداخلة = ١٨٠°

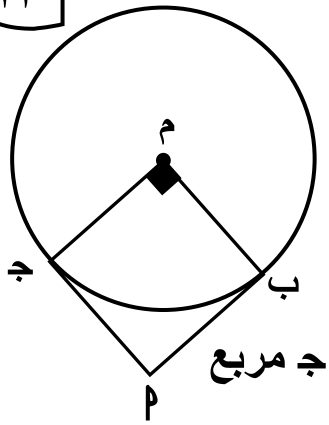
∴ س + ٢ س + ٢ س = ١٨٠°

∴ ٥ س = ١٨٠° ÷ ٥

∴ س = ٣٦°

∴ ق (∠ م) = ٣٦°

(٤) فى الشكل المقابل



م ب ، م جـ

مماسان للدائرة

ق (∠ م) = ٩٠°

اثبت أن الشكل م ب م جـ مربع

البرهان

∵ م ب مماس للدائرة م عند ب

∵ م ب نصف قطر

∴ م ب ⊥ م ب

∴ ق (∠ م ب م) = ٩٠°

∵ م جـ مماس للدائرة م عند جـ

∵ م جـ نصف قطر

∴ م جـ ⊥ م جـ

∴ ق (∠ م جـ م) = ٩٠°

∴ ق (∠ ب) + ق (∠ م) = ٩٠° + ٩٠°

= ١٨٠° وهما داخلتان فى جهة واحدة من القاطع ∴ م ب // م جـ **١**

∴ ق (∠ جـ) + ق (∠ م) = ٩٠° + ٩٠°

= ١٨٠° وهما داخلتان فى جهة واحدة من القاطع ∴ م ب // م جـ **٢**

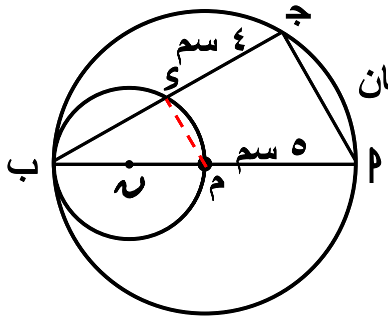
∵ م جـ = م ب = نق **٣**

∵ ق (∠ م) = ٩٠° **٤**

من ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

∴ الشكل م ب م جـ مربع

(٥) فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند ب

م أ = ٥ سم ،

ء جـ = ٤ سم

أوجد طول أجـ

العمل نصل م ء

البرهان

∵ أب قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠جـ) = ٩٠°

محيطية مرسومة فى نصف دائرة

∵ م ب قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠م ء ب) = ٩٠°

محيطية مرسومة فى نصف دائرة

∴ ق(∠م ء ب) = ق(∠جـ) = ٩٠°

و هما فى وضع تناظر ∴ أجـ // م ء

∵ م أ = م ب = نق للدائرة الكبرى

∴ م منتصف أب ∴ أب = ٥ × ٢ = ١٠ سم

فى Δ أ ب جـ

∵ م ء مرسوم من منتصف أب

∵ م ء // أجـ

∴ م ء ينصف ب جـ

∴ ب جـ = ٤ × ٢ = ٨ سم

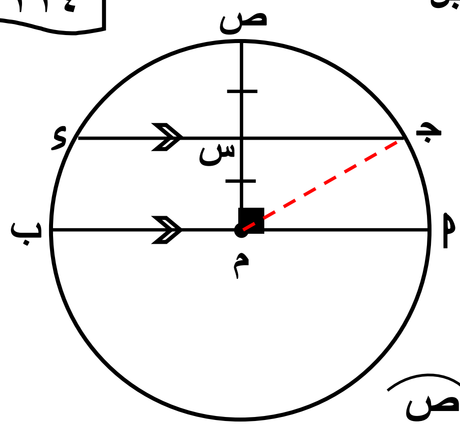
فى Δ أ ب جـ القائم فى جـ

(أجـ)^{٢} = (أب)^{٢} − (ب جـ)^{٢}

(أجـ)^{٢} = (١٠)^{٢} − (٨)^{٢} = ٣٦

∴ أجـ = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم

(٦) فى الشكل المقابل



أب قطر فى الدائرة م

أب // جـ ء

س منتصف م ص

م ص ⊥ أ م

أوجد ق(أجـ) ، ق(جـ ص)

العمل نصل م جـ

البرهان

∵ أب // جـ ء

∴ ق(∠ جـ س م) + ق (∠ أ م س) =

= ١٨٠° لأنهما داخلتان فى جهة واحدة من القاطع

∴ ق(∠ جـ س م) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°

∵ م جـ = م ص = نق

∵ س منتصف م ص

∴ م س = $\frac{١}{٢}$ م ص = $\frac{١}{٢}$ م جـ

فى Δ م س جـ القائم فى س

∵ م س = $\frac{١}{٢}$ م جـ ∴ ق(∠م جـ س) = ٣٠°

∵ أب // جـ ء

∴ ق(∠م جـ س) = ق (∠أ م جـ) = ٣٠°

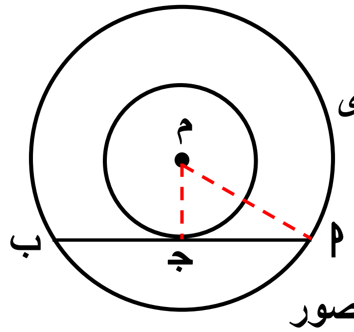
بالتبادل

∴ ق(∠جـ م س) = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°

∴ ق(أجـ) = ق (∠ أ م جـ) المركزية المقابلة له = ٣٠° م١

∴ ق(جـ ص) = ق (∠جـ م ص) المركزية المقابلة له = ٦٠° م٢

(٧) فى الشكل المقابل
دائرتان متحدتا المركز م
أب وتر فى الدائرة الكبرى
ومماس للدائرة الصغرى
عند جـ
أب = ١٤ سم
أوجد مساحة الجزء المحصور
بين الدائرتين الكبرى و الصغرى



العمل نصل م جـ ، م أ

البرهان

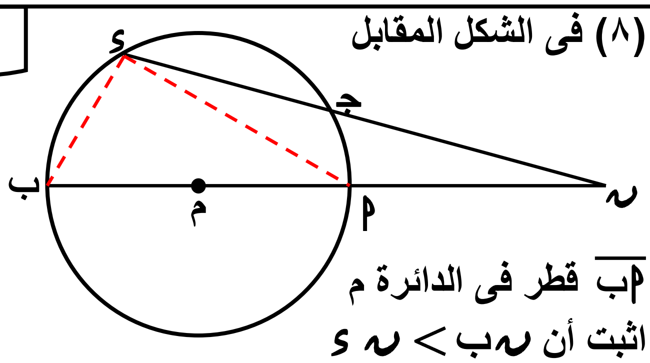
∵ أب مماس للدائرة الصغرى عند جـ
∵ م جـ نصف قطر
∴ م جـ ⊥ أب
∴ ق(∠أ جـ م) = ٩٠°

في الدائرة الكبرى
∵ م جـ يمر بمركز الدائرة
∵ م جـ ⊥ أب
∴ م جـ ينصف أب
∴ أجـ = جـب = ١٤ ÷ ٢ = ٧ سم
بفرض م أ = نق١ ، م جـ = نق٢

فى Δ أ م جـ القائم فى جـ
(أجـ)^2 = (أم)^2 − (م جـ)^2
(٧)^2 = (نق١)^2 − (نق٢)^2 = ٤٩

مساحة الجزء المحصور بين الدائرتين
= مساحة الدائرة الكبرى − مساحة الدائرة الصغرى
= π (نق١)^2 − π (نق٢)^2
= π [(نق١)^2 − (نق٢)^2]
= $\frac{22}{7}$ × ٤٩ = ١٥٤ سم^2

(٨) فى الشكل المقابل

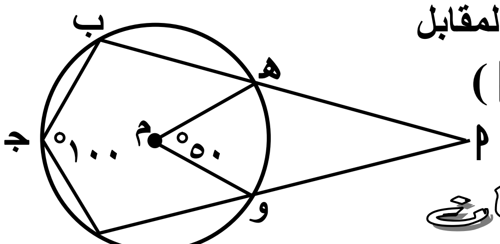


أب قطر فى الدائرة م
اثبت أن ن ب > ن ء

العمل نصل ء ب ، أ ء
البرهان ∵ أب قطر فى الدائرة م
∴ ق(∠أ ء ب) = ٩٠°
محيطية مرسومة فى نصف دائرة
∵ ق(∠ن ء ب) = ق(∠ن ء أ) + ق(∠أ ء ب)
∴ ق(∠ن ء ب) = ق(∠ن ء أ) + ٩٠°
∴ (∠ن ء ب) منفرجة
فى Δ ن ء ب
∵ ق(∠ن ء ب) > ق(∠ب) ∴ ن ب > ن ء

---

(٩) فى الشكل المقابل
أوجد ق(∠أ)



البرهان

∵ ق(هـ و⌢) = ق(∠هـ م و) المركزية المقابلة له
∴ ق(هـ و⌢) = ٥٠°

∵ ق ب ء الأكبر = ٢ق(∠جـ) المحيطية المقابلة له ∴ ق ب ء الأكبر = ٢٠٠°
∴ ق ب ء الأصغر = ٣٦٠° − ٢٠٠° = ١٦٠°

∵ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(ب ء⌢) − ق(هـ و⌢)]

ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ × [١٦٠° − ٥٠°] = ٥٥°

تدريبات عامة على الجبر

س١ أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

(١) س + ص = ٥ ، س - ص = ١

(٢) س + ص = ٨ ، س - ص = ٢

(٣) ٢ س + ص = ٣ ، ٣س - ٢ ص = ٨

(٤) س + ٤ص = ١١ ، ٣س - ٥ ص = -١

(٥) ٣س + ٢ص = ٢٣ ، ٤س - ٣ ص = ٨

(٦) ٥س = ١٣ - ٣ص ، -٢ص + ٧س - ١٢ =٠

س٢ أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً

(١) س = ص - ١ ، ص = - س + ٣

(٢) س + ص = ٢ ، س - ص = ٤

(٣) س + ص = ٢ ، س + ص = ٤

(٤) س + ٢ص = ٣ ، ٢ص = ٥ - س

(٥) س + ص = ٢ ، ٢س = ٤ - ٢ص

(٦) ص = ٢ س - ٣ ، ٣ص - ٦ س = -٩

س٣

(١) عددان مجموعهما ١٢ و الفرق بينهما ٢
أوجد العددين

(٢) زاويتان حادتان فى مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ١٠° أوجد قياس كل منهما

(٣) مستطيل طوله يزيد عن عرضه
بمقدار ٢ سم
فإذا كان محيط المستطيل يساوى ١٦ سم
أوجد مساحة المستطيل

س٤ مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية ومن الرسم استنتج إحداثى رأس المنحنى و معادلة محور التماثل و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة
و مجموعة حل المعادلة د(س) = صفر

(١) د(س) = س^{٢} - ٢ س + ١
حيث س ∋ [-٢ ، ٤]

(٢) د(س) = ٤ س - س^{٢} - ٣
حيث س ∋ [٠ ، ٤]

(٣) د(س) = س^{٢} + ٢ س + ٣
حيث س ∋ [-٣ ، ١]

س٥ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام

(١) س^{٢} - ٢ س - ٤ = صفر
مقرباً الناتج لأقرب رقم عشرى واحد

(٢) ٢س^{٢} - ٥ س + ١= صفر
مقرباً الناتج لأقرب رقم عشرى واحد

(٣) ٣س^{٢} - ٥ س + ١= صفر
مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين

(٤) ٣س^{٢} = ٥ س + ٤
مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين

(٥) (س - ٣)^{٢} - ٥س = ٠
مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين

(٦) ٢س (س - ٥) = ١
مقرباً الناتج لأقرب رقم عشرى واحد

س٦ أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين

(١) س – ص = ٠ ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٢٧

(٢) س – ص = ١ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

(٣) ص = ٢ ، س^{٢} – ص^{٢} = ٥

(٤) س – ٢ص = ١ ، س^{٢} – س ص = ٠

س٧

(١) مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٠ سم ، محيطه يساوى ٢٤ سم أوجد طولى ضلعى القائمة

(٢) عددان مجموعهما ٩ و مجموع مربعيهما ٥٣ أوجد العددين

س٨ أكمل ما يأتى :

(١) مجال الدالة د(س) = $\frac{س}{س - ١}$ هو ....

(٢) إذا كان س ≠ صفر فإن

$\frac{٥س}{س^{٢} + ١} \div \frac{س}{س^{٢} + ١}$ = ...

(٣) مجموعة أصفار الدالة

د(س) = س + ٤ فى ح هى ....

(٤) مجال المعكوس الضربى للدالة

د(س) = $\frac{س + ٢}{س - ٣}$ هو ....

(٥) أبسط صورة للكسر الجبرى $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

هى ....

(٦) المعادلة ٣س – س^{٢} + ١ = ٠ من الدرجة ....

(٧) نقطة تقاطع المستقيمين س = – ١ ، ص = ١ تقع فى الربع ....

(٨) مجموعة أصفار الدالة

د(س) = س – ٥ فى ح هى ....

(٩) مجموعة حل المعادلتين

س = ٢ ، س ص = ٦ هى ....

(١٠) مجال المعكوس الجمعى للدالة د(س) = $\frac{س - ٢}{س - ٥}$

هو ....

(١١) المعكوس الضربى للكسر الجبرى $\frac{٣}{س^{٢} + ١}$

هو ....

(١٢) مجموعة أصفار الدالة د(س) = $\frac{س - ١}{س - ٤}$

هى ....

س٩ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن

(١) ن(س) = $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٧ س + ١٢} - \frac{٤}{س^{٢} - ٤ س}$

(٢) ن(س) = $\frac{س^{٢} + ٤س + ٣}{س^{٣} - ٢٧} \div \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٣ س + ٩}$

ثم أوجد ن(٢) ، ن(–٣) إن أمكن

(٣) ن(س) = $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} + ٥ س + ٦} \times \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٢ س + ٤}$

(٤) $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٢س}{س^{٢} - ٤} + \frac{س + ٣}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

س١٠ (١) إذا كان $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٢س}{س^{٢} - ٣س + ٢}$ فأوجد

(ﻡ) $ن^{-١}(س)$ فى أبسط صورة و عين مجالها

(ب) قيمة س إذا كان $ن^{-١}(س) = ٣$

(٢) إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢}}{س^{٣} - س^{٢}}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٣} + س^{٢} + س}{س^{٤} - س}$

فأثبت أن $ن_{١} = ن_{٢}$

س١١ أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان ﻡ ⊂ ف لتجربة عشوائية ما و كان ل(ﻡ') = ٢ ل(ﻡ) فإن ل(ﻡ) = ...

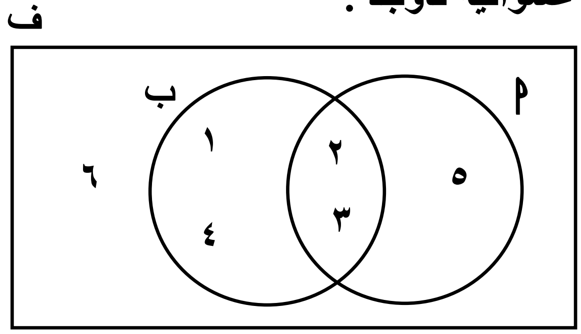
(٢) إذا كان ﻡ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما فإن ل (ﻡ∩ب) = ...

(٣) احتمال الحدث المستحيل = ...

(٤) إذا كان ﻡ ⊂ ف لتجربة عشوائية ما و كان ل(ﻡ) = ٠و٦ فإن ل(ﻡ') = ...

(٥) إذا كان احتمال فوز إحدى الفرق = ٠و٧ فإن احتمال عدم فوزه = ...

س١٢ إذا كان ﻡ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية فأوجد :



(١) ل (ﻡ∩ب) (٢) ل (ﻡ−ب)

(٣) احتمال عدم وقوع الحدث ﻡ

س١٣ إذا كان ﻡ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

و كان ل(ﻡ) = ٠و٣ ، ل(ب) = ٠و٦

، ل (ﻡ∩ب) = ٠و٢

أوجد ل (ﻡ∪ب) ، ل (ﻡ−ب)

س١٤ إذا كان ﻡ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

و كان ل(ﻡ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٢}$

، ل (ﻡ∪ب) = $\frac{٥}{٨}$

أوجد ل(ﻡ') ، ل (ﻡ∩ب)

س١٥ إذا كان ﻡ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

و كان ل(ﻡ) = ٠و٧ ، ل(ب) = ٠و٦

، ل (ﻡ∩ب) = ٠و٤

أوجد (١) احتمال عدم وقوع الحدث ﻡ

(٢) احتمال وقوع أحد الحدثين دون وقوع الآخر

تدريبات عامة على الهندسة

س١ أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان طول قطر الدائرة ٨ سم ، المستقيم ل يبعد عن مركزها ٤ سم ، فإن ل يكون ....

(٢) إذا كان سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = {ﻫ} فإن الدائرتين م ، ن تكونان ....

(٣) م ، ن دائرتان متقاطعتان ، طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٤ سم على الترتيب فإن م ن $\in$ ....

(٤) إذا كانت مساحة الدائرة م = ١٦ π سم^2 ، ﻫ نقطة فى مستويها حيث م ﻫ = ٨ سم فإن ﻫ تقع .... الدائرة م

(٥) دائرة م طول قطرها ٦ سم ، فإذا كان المستقيم ل يقع خارج الدائرة ، فإن بعد مركز الدائرة عن المستقيم ل $\in$ ....

(٦) دائرة طول قطرها (٢س + ٥) سم ، المستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة (س + ٢) سم فإن ل يكون ....

(٧) وتر الدائرة هو القطعة المستقيمة المرسومة بين ....

(٨) المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على أى وتر فيها ....

(٩) خط المركزين لدائرتين متماستين من الداخل يمر ....

(١٠) مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع ....

(١١) الأوتار المتساوية الطول فى الدائرة ....

(١٢) أى ثلاث نقط لا تنتمى لمستقيم واحد تمر بها ....

(١٣) محور تماثل الدائرتين م ، ن المتقاطعتين فى ﻫ ، ب هو ....

(١٤) إذا كان ﻫ ب = ٧ سم فإن مساحة أصغر دائرة تمر بالنقطتين ﻫ ، ب = ... سم^2

(١٥) إذا كانت محيط الدائرة م = ٨ π سم ، ﻫ نقطة على الدائرة فإن م ﻫ = ...

(١٦) وتر طوله ٨ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإنه يبعد عن مركزها .... سم

(١٧) مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو نقطة تقاطع ....

(١٨) أكبر الأوتار طولاً فى الدائرة يسمى ....

(١٩) المستقيم المار بمركز الدائرة و بمنتصف أى وتر فيها يكون ....

(٢٠) القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة .... فى الطول

(٢١) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين هو ....

(٢٢) دائرتان م ، ن متماستان من الخارج نصفى قطريهما ٥ سم ، ٣ سم فإن م ن = ... سم

(٢٣) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس مثلث قائم الزاوية فيه طولا ضلعى القائمة ٣ سم ، ٤ سم = ... سم

(٢٤) قياس الزاوية المركزية = ... قياس الزاوية المماسية المشتركة معها فى القوس

س٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس

(١) المماس لدائرة طول قطرها ٦ سم يكون على بعد .... سم من مركزها
(٦ ، ١٢ ، ٣ ، ٢)

(٢) يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....
(معين ، مستطيل ، شبه منحرف ، متوازى أضلاع)

(٣) $\overline{\text{ا ب}}$ قطر في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{ا جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ مماسان للدائرة فإن $\overleftrightarrow{\text{ا جـ}}$ .... $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$
(يقطع ، يوازى ، عمودى على ، ينطبق على)

(٤) دائرة محيطها ٦ ط سم ، و المستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم فإن المستقيم يكون .... للدائرة
(مماس ، قاطع ، خارج ، قطر)

(٥) دائرتان م ، ن متماستان من الداخل نصفى قطريهما ٥ سم ، ٩ سم فإن م ن = ... سم
(١٤ ، ٤ ، ٥ ، ٩)

(٦) الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة
(حادة ، منفرجة ، مستقيمة ، قائمة)

(٧) عدد محاور التماثل لأى دائرة =
(صفر ، ١ ، ٢ ، عدد لانهائى)

(٨) إذا كان المستقيم مماساً للدائرة التى قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها بمقدار .... سم
(٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨)

(٩)إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن ={ا}
و طول نصف قطرهما أحدهما ٣ سم ، م ن = ٨ سم
فإن طول نصف قطر الدائرة الأخرى = ... سم

(١٠) قياس القوس الذى يمثل نصف قياس الدائرة = ...
(٤٥° ، ٩٠° ، ١٢٠° ، ١٨٠°)

(١١) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستان من الخارج = ...
(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣)

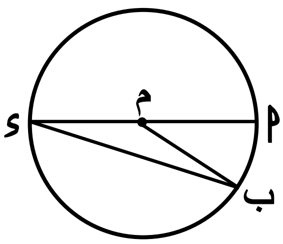
(١٢) قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة = ...
(٤٥° ، ٩٠° ، ١٢٠° ، ١٨٠°)

(١٣) الزاوية المماسية هى زاوية محصورة بين
(وتران ، مماسان ، وتر و مماس ، وتر و قطر)

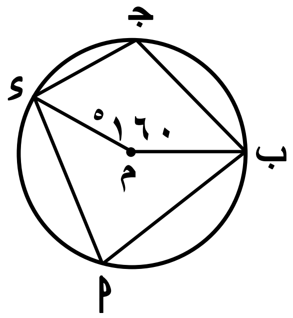
(١٤) إذا كان ا ب جـ د شكل رباعى دائرى فيه
فإن ق(∠ا) = ق(∠جـ) = ...
(٤٥° ، ٩٠° ، ١٢٠° ، ١٨٠°)

(١٥) م ، ن دائرتان متقاطعتان ، طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٥ سم فإن م ن ∈ ....
(]٨،∞[أو]٢،∞[أو]٠،٢[أو]٢،٨[)

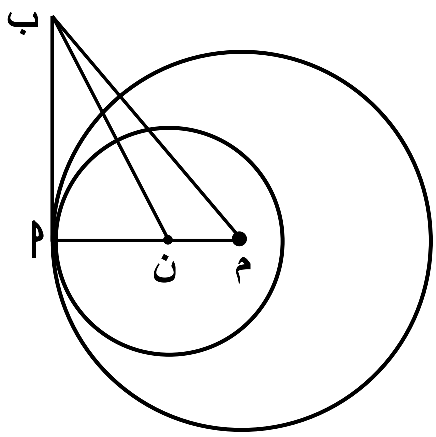
(١٦) إذا كان ق(⌒ا ب) = ٥٠° فإن ق(∠ا د ب) =
(٢٥° ، ٥٠° ، ١٠٠° ، ١٥٠°)



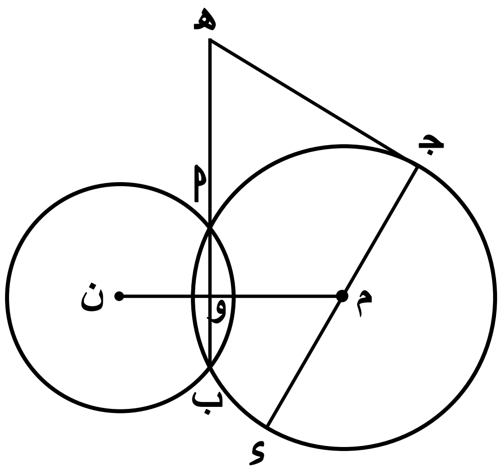
(١٧) ق(∠جـ) = ...



س٣ م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ١٠ سم ، ٦ سم على الترتيب و متماستان من الداخل فى أ إذا كانت مساحة المثلث ب م ن = ٢٤ سم^{٢} أوجد طول أب

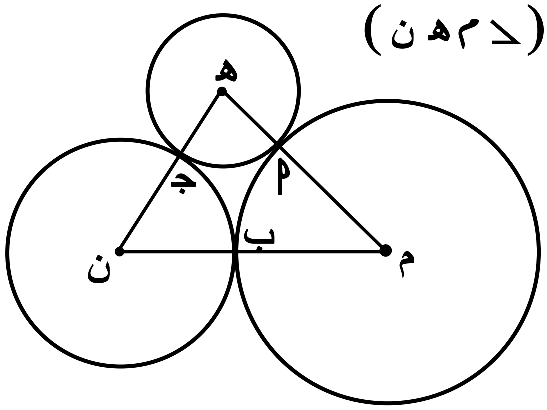


س٤ جـهـ مماس للدائرة اثبت أن الشكل جـ م و هـ رباعى دائرى



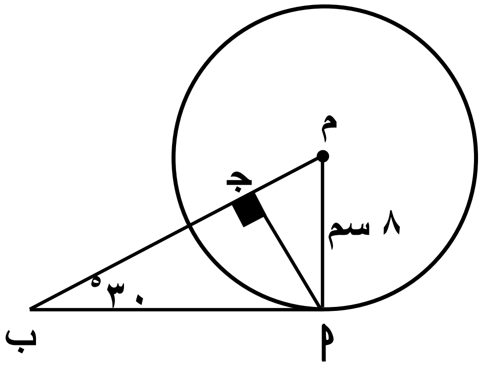
س٥ أهـ = ١ سم ، نجـ = ٢ سم ، مب = ٣ سم ،

أوجد ق(∠ م هـ ن)



س٦ أب مماس للدائرة

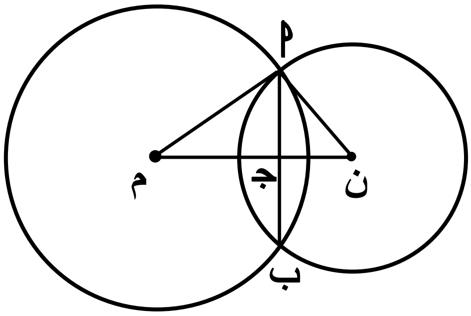
أوجد طول كل من أب ، أجـ



س٧ الدائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ،ب

م أ مماس للدائرة ن ، ن أ مماس للدائرة م

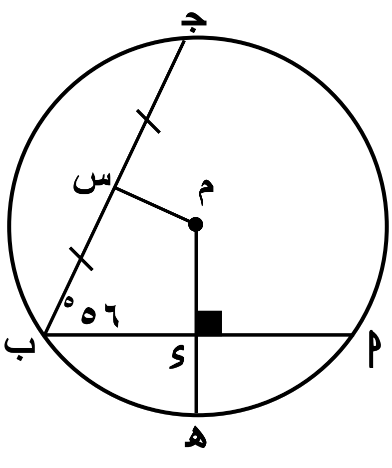
، م أ = ١٢سم ، أن = ٩ سم أوجد طول أب



س٨ مهـ = ٥ سم ، أب = ٨ سم

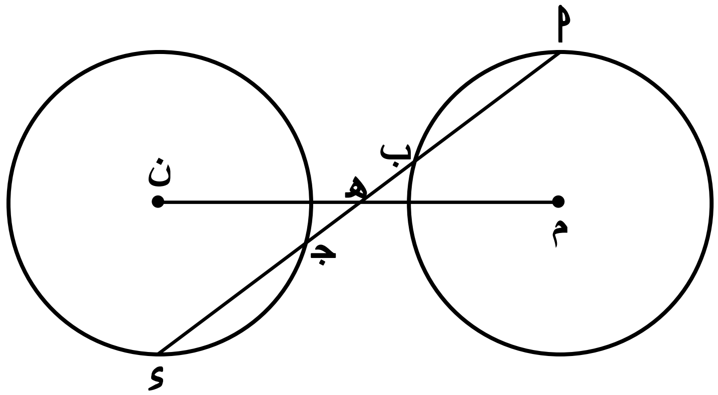
اثبت أن الشكل ء م س ب رباعى دائرى ثم

أوجد ق(∠ ءمس) ، طول ءهـ



س٩ م ، ن دائرتان متطابقتان ، هـ منتصف م ن

اثبت أن ٲب = جـ ء ، هـ منتصف ٲ ء

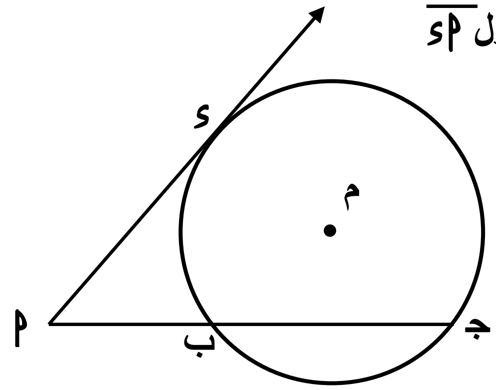


س١٠ م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

ٲ ء مماس للدائرة ، ٲب = ٤ سم ، ٲجـ = ١٢ سم

أوجد بعد الوتر ب جـ عن مركز الدائرة

أوجد طول ٲ ء

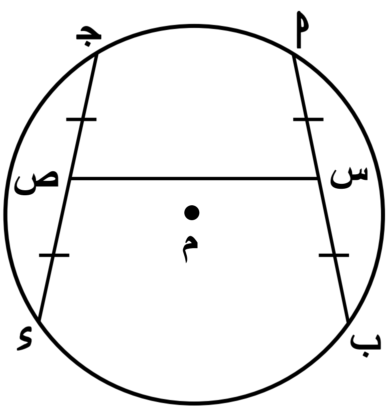


س١١ ٲب = جـ ء

اثبت أن

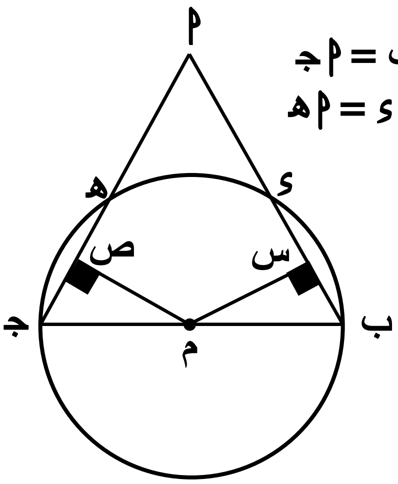
(١) ق(∠ ب س ص) = ق(∠ ء ص س)

(٢) ٲجـ // ب ء

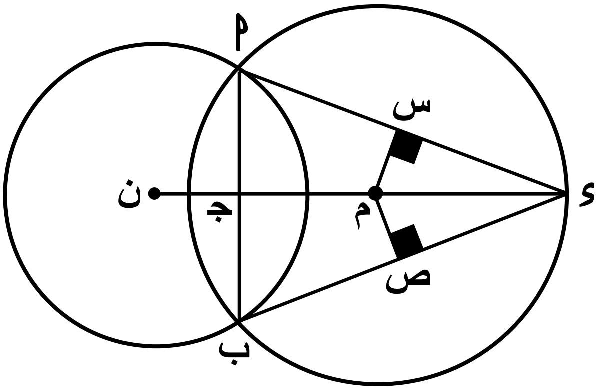


س١٢ ٲب = ٲجـ

اثبت أن ٲ ء = ٲهـ



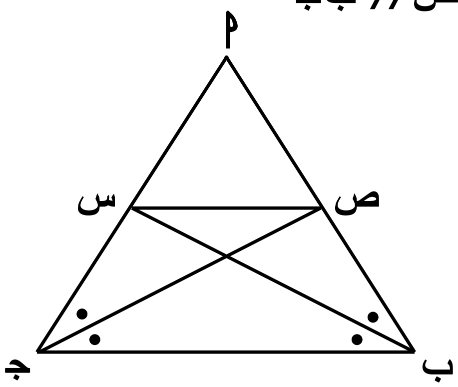
س١٣ اثبت أن م س = م ص



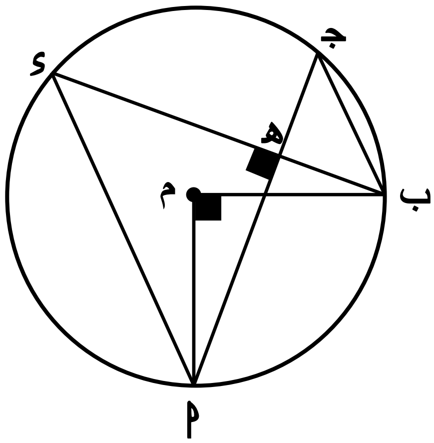
س١٤ ٲب = ٲجـ اثبت أن

(١) الشكل ب جـ س ص رباعى دائرى

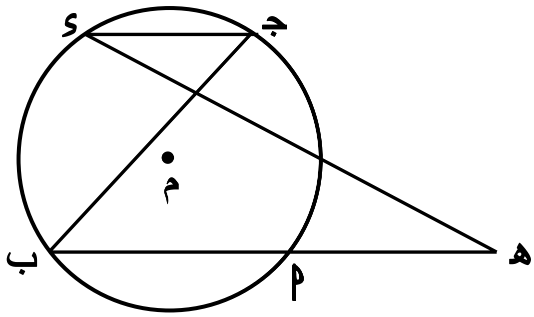
(٢) س ص // ب جـ



س١٥ أوجد ق(∠جبى)
ثم اثبت أن $\overline{\text{أى}}$ // $\overline{\text{بج}}$

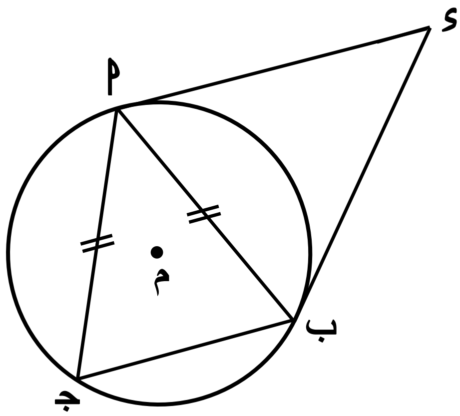


س١٦ اثبت أن ق(∠هـ) < ق(∠بجى)

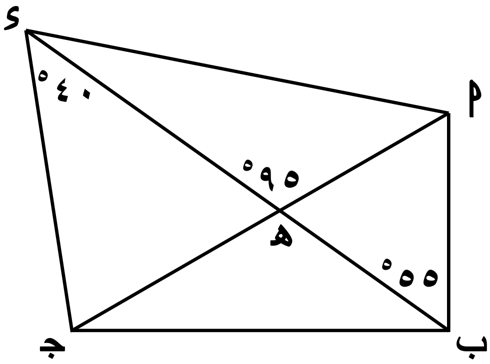


س١٧ $\overline{\text{ىأ}}$ ، $\overline{\text{ىب}}$ مماسان للدائرة

اثبت أن $\overline{\text{أج}}$ مماس للدائرة المارة
بالنقط أ ، ب ، ى

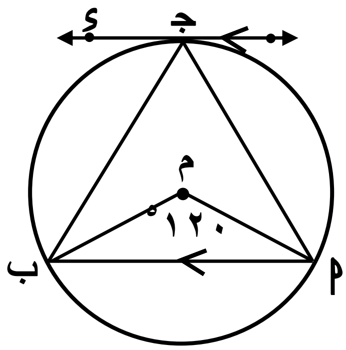


س١٨ اثبت أن الشكل أ ب ج ى رباعى دائرى

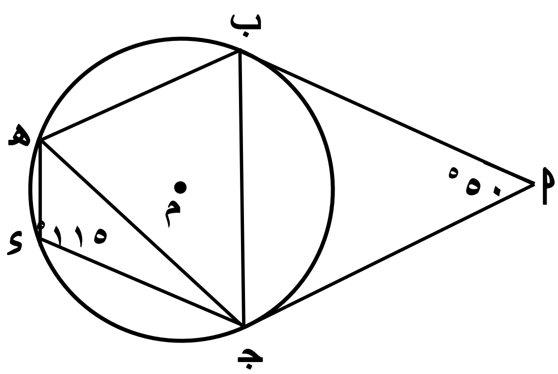


س١٩ $\overleftrightarrow{\text{جى}}$ مماس للدائرة

اثبت أن Δ أ ب ج متساوى الأضلاع



س٢٠ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أج}}$ مماسان للدائرة
اثبت أن (١) $\overleftarrow{\text{بج}}$ ينصف ∠أبهـ
(٢) جب = جهـ



س٢١ دائرتان م ، ن متماستان من الداخل

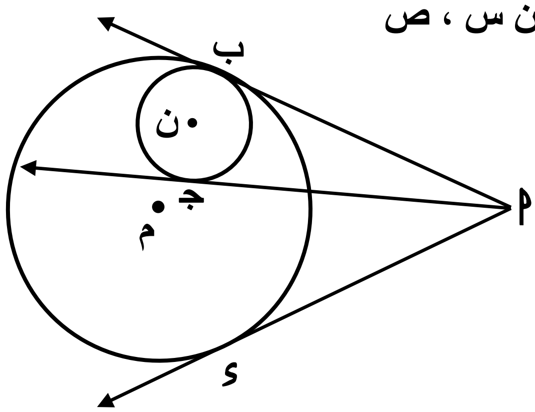
أب مماس مشترك للدائرتين ،

أجـ مماس للدائرة ن ،

أء مماس للدائرة م ، أجـ = ١٥ سم ،

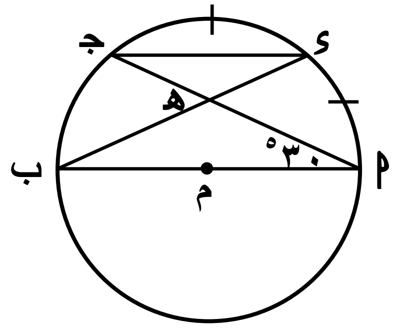
أب = (٢س – ٣) سم ، أء = (ص – ٢) سم

أوجد كلاً من س ، ص

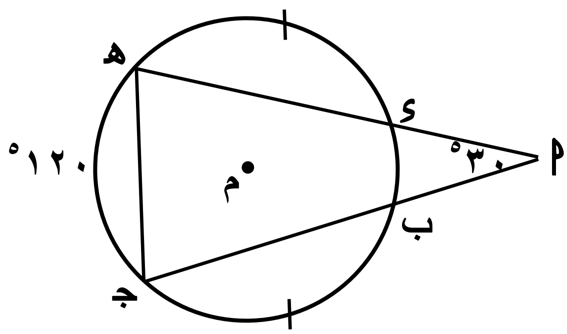


س٢٢ أوجد ق(∠ء) ، ق أء

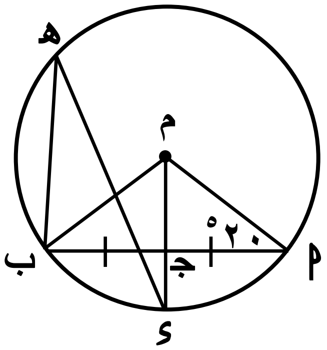
ثم اثبت أن أب // جـء



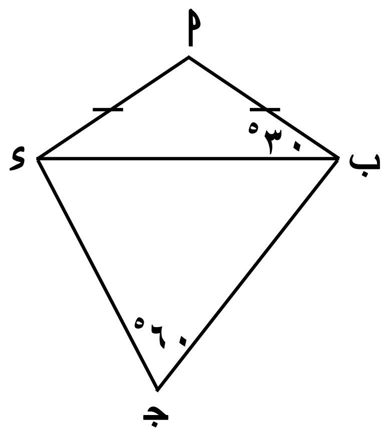
س٢٣ أوجد ق بء ثم اثبت أن أب = أء



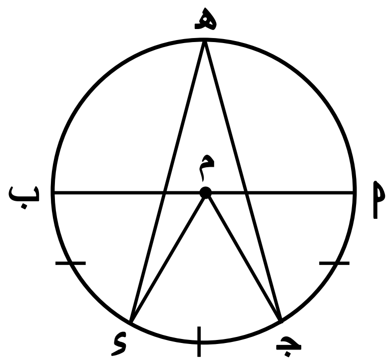
س٢٤ أوجد ق(∠ب هـ ء) ، ق أب



س٢٥ اثبت أن الشكل أب جـ ء رباعى دائرى



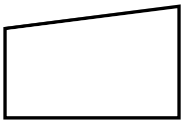
س٢٦ أوجد ق(∠ جـ م ء) ، ق(∠ جـ هـ ء)



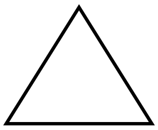
س٢٧

اذكر الحالات التى يكون فيها الشكل رباعياً دائرياً

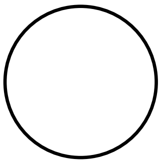
المساحة و المحيط و الحجم



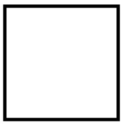
محيط أى شكل هندسى مغلق هو طول الإطار الخارجى الذى يحدد الشكل
محيط أى مضلع = مجموع أطوال أضلاعه



محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه
مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الإرتفاع

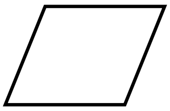


محيط الدائرة = ٢ π نق
مساحة الدائرة = π نق^{٢}



محيط المربع = طول الضلع × ٤
مساحة المربع = طول الضلع × نفسه
مساحة المربع = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طول القطرين = $\frac{١}{٢}$ مربع طول القطر

محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢
مساحة المستطيل = الطول × العرض

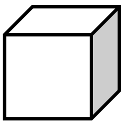


مساحة المعين = طول الضلع × الإرتفاع
مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طول القطرين

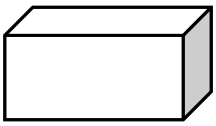
مساحة متوازى الأضلاع = طول القاعدة × الإرتفاع المناظر لها

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع طول القاعدتين المتوازيتين × الإرتفاع

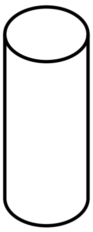
مساحة شبه المنحرف = طول القاعدة المتوسطة × الإرتفاع



حجم المكعب = طول الحرف × طول الحرف × طول الحرف = ل × ل × ل = ل^{٣}
المساحة الجانبية للمكعب = مساحة الوجه × ٤ = ل × ل × ٤ = ٤ ل^{٢}
المساحة الكلية للمكعب = مساحة الوجه × ٦ = ل × ل × ٦ = ٦ ل^{٢}



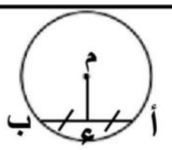
حجم متوازى المستطيلات = الطول × العرض × الإرتفاع
حجم متوازى المستطيلات = مساحة القاعدة × الإرتفاع
المساحة الجانبية لمتوازى المستطيلات = محيط القاعدة × الإرتفاع
المساحة الكلية لمتوازى المستطيلات = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين



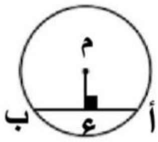
حجم الإسطوانة = مساحة القاعدة × الإرتفاع = π نق^{٢} ع
المساحة الجانبية للإسطوانة = محيط القاعدة × الإرتفاع = ٢ π نق ع
المساحة الكلية للإسطوانة = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين
= ٢ π نق ع + ٢ (π نق^{٢})

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} ،، مساحة الكرة = ٤ π نق^{٢}

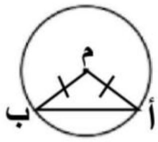
مفاتيح الهندسة ٣ع



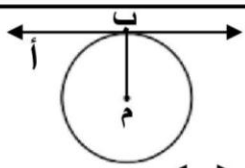
∵ م ء يمر بمركز الدائرة
∵ م ء ينصف أ ب
∴ م ء ⊥ أ ب



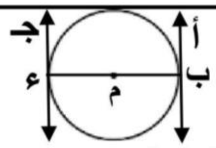
∵ م ء يمر بمركز الدائرة
∵ م ء ⊥ أ ب
∴ م ء ينصف أ ب



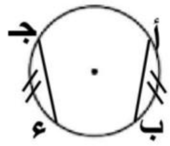
∵ م أ = م ب = نق
∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ب)



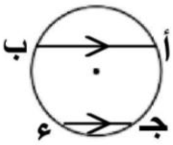
∵ أ ب مماس للدائرة م
∵ م ب نصف قطر
∴ م ب ⊥ أ ب



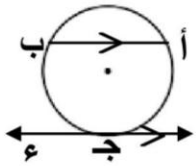
∵ أ ب ، جـ ء مماسان للدائرة
∵ ب ء قطر
∴ أ ب // جـ ء



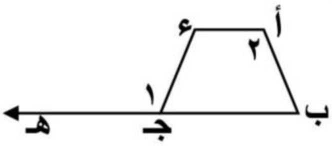
∵ ق(أ ب) = ق(جـ ء)
∴ أ ب = جـ ء
والعكس صحيح



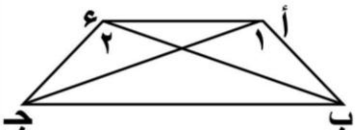
∵ أ ب // جـ ء
∴ ق(أ جـ) = ق(ب ء)



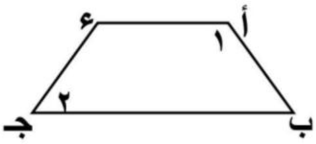
∵ أ ب // جـ ء
∴ ق(أ جـ) = ق(ب جـ)



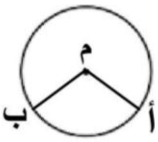
∵ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢)
∴ أ ب جـ ء رباعى دائرى
والعكس صحيح



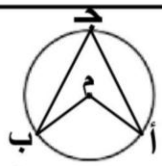
∵ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢)
∴ أ ب جـ ء رباعى دائرى
والعكس صحيح



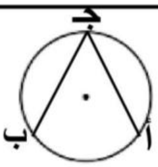
∵ ق(∠١) + ق(∠٢) = ١٨٠°
∴ أ ب جـ ء رباعى دائرى
والعكس صحيح



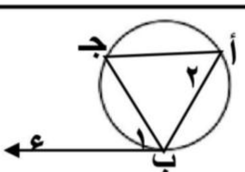
ق(∠ م) المركزية
= ق(أ ب) المقابل لها



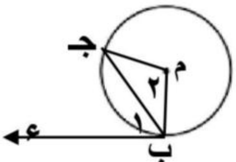
ق(∠جـ)المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠ م)
المركزية مشتركتان
فى أ ب



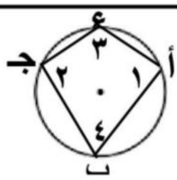
ق(∠ جـ) المحيطية
= $\frac{1}{2}$ ق(أ ب) المقابل لها



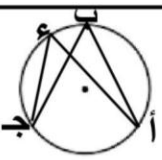
∵ ب ء مماس للدائرة
∴ ق(∠١)المماسية =
ق(∠٢) المحيطية



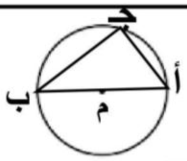
∵ ب ء مماس للدائرة
∴ ق(∠١)المماسية = $\frac{1}{2}$
ق(∠٢) المركزية



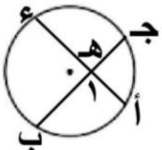
∵ أ ب جـ ء رباعى دائرى
ق(∠١) + ق(∠٢) = ١٨٠°
ق(∠٣) + ق(∠٤) = ١٨٠°



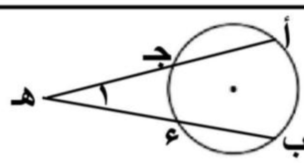
ق(∠ب)المحيطية = ق(∠ ء)
المحيطية مشتركتان
فى أ جـ



∵ أ ب قطر فى الدائرة
∴ ق(∠جـ) = ٩٠°
محيطية مرسومة فى نصف دائرة

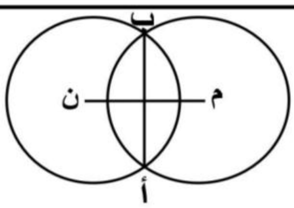


ق(∠١) = $\frac{1}{2}$ [ق(أ ب) + ق(جـ ء)]

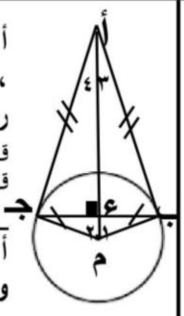


ق(∠١) = $\frac{1}{2}$ [ق(أ ب) - ق(جـ ء)]

∵ م س = م ص أبعاد متساوية
∴ أب = جـ ء أوتار متساوية
و العكس صحيح



م ن خط المركزين ⊥ أ ب
وينصفه



أ ب = أ جـ
، أ ب م جـ
رباعى دائرى
ق(∠ ١) = ق(∠٢)
ق(∠ ٣) = ق(∠٤)
أ م ⊥ ب جـ
وينصفه